

Matematikdidaktikens vägar¹

Titeln till mitt inlägg inspirerades av boken *Matematikens vägar*, som många här säkert känner till, skriven av Lancelot Hogben. Den engelska originaltiteln var *Mathematics in the making* (för svensk översättning, se Hogben, 1962), och boken var en historisk bild av framväxten och en beskrivning av de grundläggande matematiska begrepp och metoder som nu används och undervisas om. När det gäller matematikdidaktikens vägar står vi snarare mitt i *the making* och kanske bidrar till framväxten av de matematikdidaktiska metoder och verktyg som i en framtida historiebok kommer att ses som grundläggande.

Men matematikdidaktiken har redan idag en historia, där en kritisk period var den s.k. nya matematiken, *new math*. En klassisk bok från den tiden har titeln "Why Johnny can't add" (Kline, 1973), en titel som blivit ett begrepp. Var det Håkan Lennerstad som ställde frågan igår på denna konferens om undervisningen har någon betydelse? Låt oss titta på ett avsnitt ur Morris Klines text.

Let us look into a modern mathematics classroom. The teacher asks, "Why is $2 + 3 = 3 + 2$?"

Unhesitatingly the students reply, "Because both equal 5"

No, reproves the teacher, the correct answer is because the commutative law of addition holds. Her next question is, Why is $9 + 2 = 11$?

Again the students respond at once: "9 and 1 are 10 and 1 more is 11."

"Wrong," the teacher exclaims. "The correct answer is that by the definition of 2, $9 + 2 = 9 + (1 + 1)$. But because the associative law of addition holds, $9 + (1 + 1) = (9 + 1) + 1$. Now $9 + 1$ is 10 by the definition of 10 and $10 + 1$ is 11 by the definition of 11."

It would seem that the poor children would deserve some relaxation after school, but parents anxious to know what progress their children are making also query them. One parent asked his eight-year-old child, "How much is $5 + 3$?" The answer he received was that $5 + 3 = 3 + 5$ by the commutative law. Flabbergasted, he re-phrased the question: "But how many apples are 5 apples and 3 apples?"

The child didn't quite understand that "and" means plus and so he asked, "Do you mean 5 apples plus 3 apples?"

¹ Denna text är grundad på den föreläsning författaren gav på Forskarskolans Jubileumskonferens, Linköping den 25-26 oktober 2006. Se hemsidan www.mai.liu.se/jubileumskonferens/

The parent hastened to say yes and waited expectantly. "Oh," said the child, "it doesn't matter whether you are talking about apples, pears or books; $5 + 3 = 3 + 5$ in every case."

Exemplet visar tydligt konsekvenserna av att reducera komplexiteten i situationer med lärande och undervisning. Trots den nya matematikens gigantiska misslyckande bidrog den ändå till att öppna ögonen för just denna komplexitet och kanske till och med initierade den moderna matematikdidaktiken som vetenskap.

Tillbaka till titeln, så är min ambitionsnivå idag betydligt mer anspråkslös än Hogbens. Dels tänker jag hålla mig till vägarna genom det *svenska* matematikdidaktiska landskapet, dels till forskning kopplat till *forskarutbildning*, med tanke på anledningen till att vi samlats här dom här två dagarna. Formuleringen i min titel innehåller en metafor, som ju inte bara är ett användbart redskap för den abstrakta tanken utan kanske också dess nödvändiga grund, som nyligen hävdats även med koppling till matematikens abstrakta begrepp och matematiskt tänkande. Jag tänker här på arbeten av framför allt Mark Johnson, George Lakoff och Rafael Nuñez. Personligen attraherades jag ganska tidigt av dessa vilket syns i en del jag skrev redan i början på 90-talet, så det finns en risk att jag även i fortsättningen använder vissa metaforiska formuleringar.

Jag tänker försöka ge en bild av några aspekter av forskarskolans betydelse för matematikdidaktikens utveckling i Sverige, både i kvantitativa och kvalitativa termer. Inte riktigt som en före-efter annons för en kommersiell produkt, särskilt som vi inte än vet något om efter, men genom att spekulera kanske man i viss grad också kan initiera att det drar åt det hållet, vem vet?

Det en forskarskola direkt producerar är, kan man förenklat säga, två saker – *avhandlingar* och *forskare*. Detta sker genom att forskarskolans doktorander och handledare (och andra berörda) bedriver kurs- och forskningsverksamhet. Indirekt påverkar förstås verksamheten utveckling av forskningsmiljöer och forskningens resultat utbildningspraktik (får man hoppas) och annat. Men om vi koncentrerar oss på dessa två produkter, avhandlingar och forskare, så placerar de sig någonstans i det matematikdidaktiska landskapet, slår kanske in på någon eller några av dess vägar, eller öppnar/bygger kanske helt nya. Landskapet förändras. En relevant fråga en dag som denna är då hur forskarskolan har påverkats av och påverkat det svenska matematikdidaktiska landskapet. Detta har rimligen både kvalitativa och kvantitativa aspekter. Låt mig börja med det enklaste, att kvantitativt räkna frekvenser mot bakgrund av en tidsaxel, och sedan successivt glida över till det kvalitativa.

För räkningen krävs kriterier, vilka avhandlingar ska räknas med? Om vi håller oss till den definition av matematikens didaktik som Gerd tog upp för en timme sedan, den som finns i Niss (2001), så kan vi med plus minus något epsilon använda den lista som sammanställts på NCM:s hemsida, som idag innehåller nära 60 svenska doktorsavhandlingar. Men låt oss först uppehålla oss en kort stund vid identitetsfrågan, vad finns i det matematikdidaktiska landskapet?

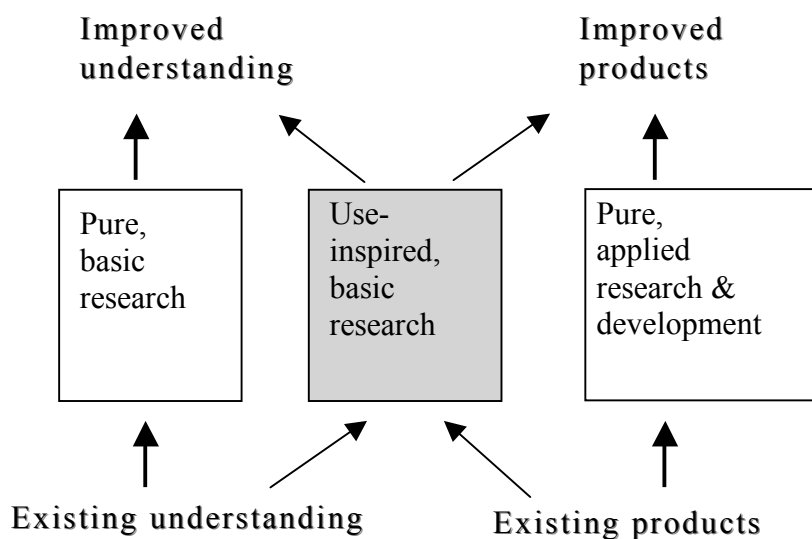
- *Studieobjekt.* Matematikens didaktik utgör det vetenskapliga arbetsfält där man försöker *identifiera, beskriva* och *förstå* företeelser och processer som är eller skulle kunna vara en del av *undervisning och lärande när det gäller matematik på alla nivåer i utbildningssystemet.*
- *Strävan* – När det gäller förståelse av dessa företeelser och processer, är det centrala syftet i verksamheten att visa på och *klargöra orsakssamband* och *orsaksmekanismer*
- *Ingångar.* ... samtliga förhållanden som är av betydelse för undervisning och lärande i matematik oberoende av vilka aspekter det berör, använder sig av idéer, metoder och resultat från andra ämnesområden när relevant
- *Aktiviteter.* ... Teoretisk/empirisk grundforskning, tillämpad forskning, systematisk reflekterande praxis

Förutom dessa fyra aspekter av definitionen diskuterar Mogens även

- forskningens syfte, där områdets *dubbla natur* är en central del av dess identitet och en kritisk punkt utifrån didaktikens grundläggande koppling till matematikbildningens praktik.

kan koppla detta till följande dynamiska modell för forskning inom matematikens didaktik (se figur 1), som integrerar vad som brukar kallas ren respektive tillämpad forskning.

En annan central aspekt är fältets ofrånkomliga *komplexitet* (tänk t.ex. på Anna Sierpinskias studie om frustration som presenterades vid denna konferens), som griper in i varje lärande- eller undervisningssituation som studeras. De svar som kan ges på genuina frågor om lärande och undervisning förblir partiella, modeller grundade på de forskningsperspektiv och metoder som väljs för att undersöka fenomenet. Ur vetenskapsteoretisk synvinkel är det vanligt att peka på olikheterna mellan naturvetenskaplig forskning och samhällsvetenskaplig men ett gemensamt mål är en strävan att utveckla teorier eller modeller av de fenomen som utgör forskningens objekt. Lester (2005) skriver t.ex. att "Educational research is a process of modeling educational processes" (s. 463).



Figur 1. En dynamisk modell för matematikdidaktisk forskning (Lester, 2005).

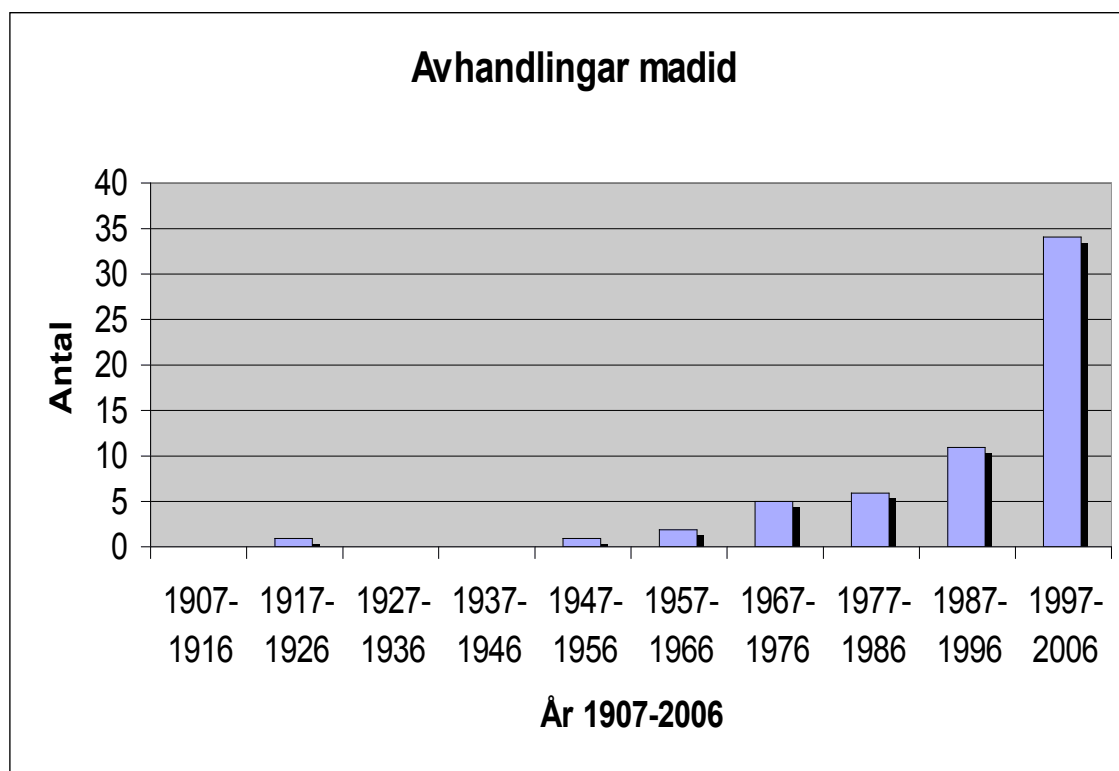
En annan central aspekt är fältets ofrånkomliga *komplexitet* (jfr. Anna Sierpinskias studie om frustration som presenterades vid denna konferens), som griper in i varje lärande- eller undervisningssituation som studeras. De svar som kan ges på genuina frågor om lärande och undervisning förblir partiella, modeller grundade på de forskningsperspektiv och metoder som väljs för att undersöka fenomenet. Ur vetenskapsteoretisk synvinkel är det vanligt att peka på olikheterna mellan naturvetenskaplig forskning och samhällsvetenskaplig men ett gemensamt mål är en strävan att utveckla teorier eller modeller av de fenomen som utgör forskningens objekt. Lester (2005) skriver t.ex. att "Educational research is a process of modeling educational processes" (s. 463).

Lester skiljer mellan *teoretiska*, *praktiska* och *konceptuella* forskningsperspektiv där det senare försöker kombinera de starka sidorna hos de förra och undvika deras enskilda svagheter genom att kombinera teorier och begrepp från olika håll relativt de krav som kontexten ställer. Vad som slutligen avgör styrkan i ett forskningsresultat är, enligt Lester, inte dess förklarande kraft och relevans utan dess grund, eller enkelt uttryckt - håller slutsatserna? Ett annat avgörande kriterium är forskningens konsekvenser, som naturligtvis berör både ökad kunskap/förståelse och användbarhet (som grund för utbildningsplanering), men även frågan om konsekvenserna är etiskt försvarbara.

Bland olika teoretiska ingångar kan vi skilja mellan till exempel *kognitiva*, *sociala* och *epistemologiska*. Det handlar då om hur man avgränsar sitt forskningsobjekt, hur man identifierar det fenomen man studerar och vad man

betraktar som minsta möjliga förklaringsenhet för att modellera komplexiteten i fenomenet.

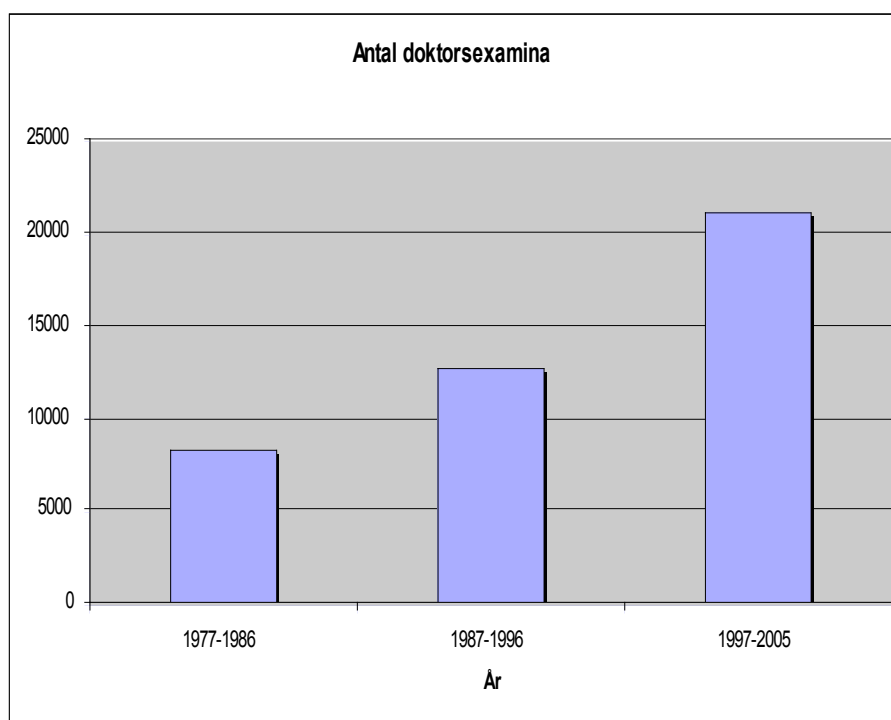
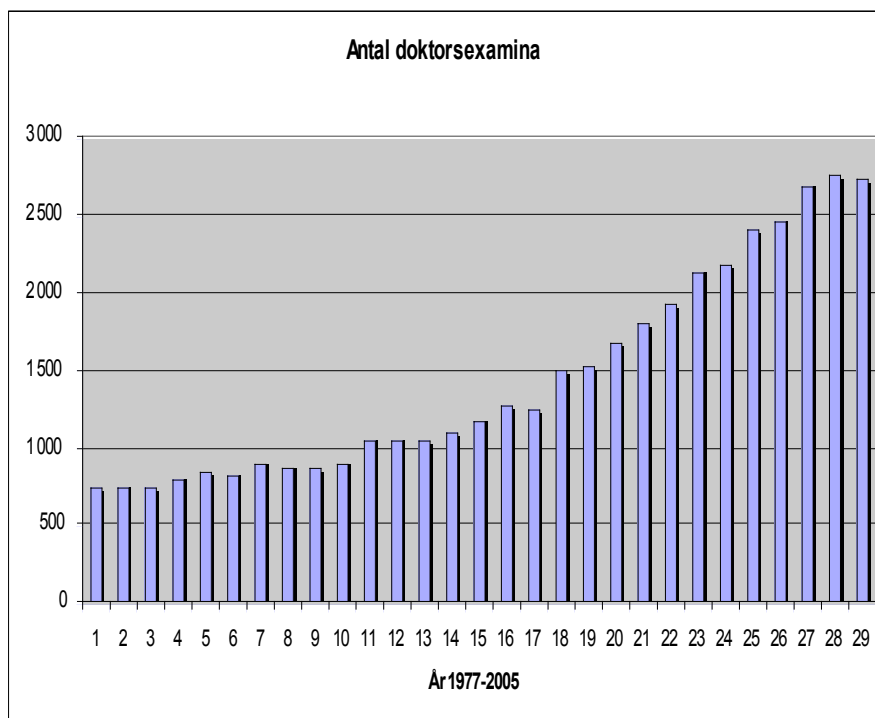
Låt oss nu börja räkna. Med en tidsaxel som startar 1907 får vi följande decennieindelade histogram över antal svenska avhandlingar inom det matematikdidaktiska området (figur 2; jag har här räknat in tre disputationer som ska ske i december 2006).



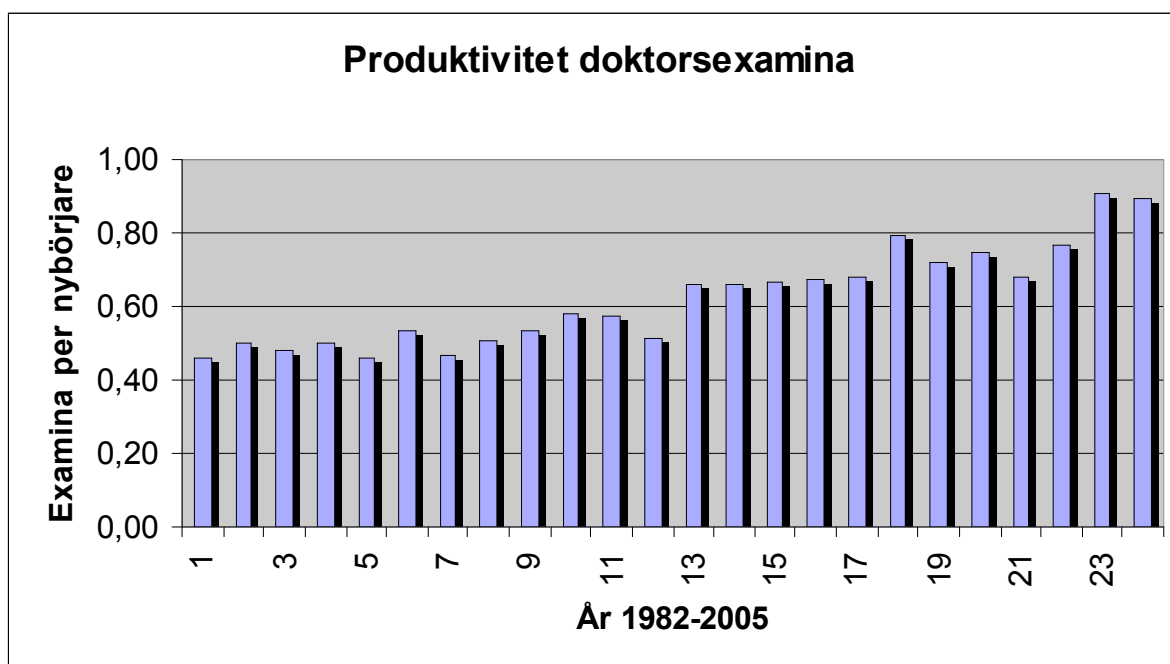
Figur 2. Antal doktorsavhandlingar inom svensk matematikdidaktisk forskning.

Då forskarskolans period helt ingår i senaste (pågående) decenniet där är det enkelt att få en visuell bild av det kvantitativa bidraget från forskarskolan (dra bort!). Man kan också räkna med en komplettering med kanske 5 till från forskarskolan det närmaste året. Man kan utifrån denna enkla tabell lugnt påstå att intresset på akademisk nivå av forskning om matematikutbildning varit endast sporadiskt fram till dom senaste två decennierna och att den procentuellt sett stora ökningen under 1990-talet fortsatt under 2000-talets första 7 år även utan forskarskolan trots att den svarat för ca en tredjedel hittills. Inte mindre än 45% av alla svenska avhandlingar inom området har producerats de senaste 7 åren och 73% från och med 1990. Innan man drar alltför stora växlar på detta fenomen kan det finnas skäl att se på följande tabellen i figur 3. Det har alltså varit en generell kraftig ökning av forskarutbildningens output som helhet,

delvis på utbildningspolitiska grunder. Antalet doktorander har inte ökat lika markant som antalet doktorexamina, utan det är produktiviteten som stärkts (se figur 4), möjligen beroende på förändrade finansieringsformer för doktorander.



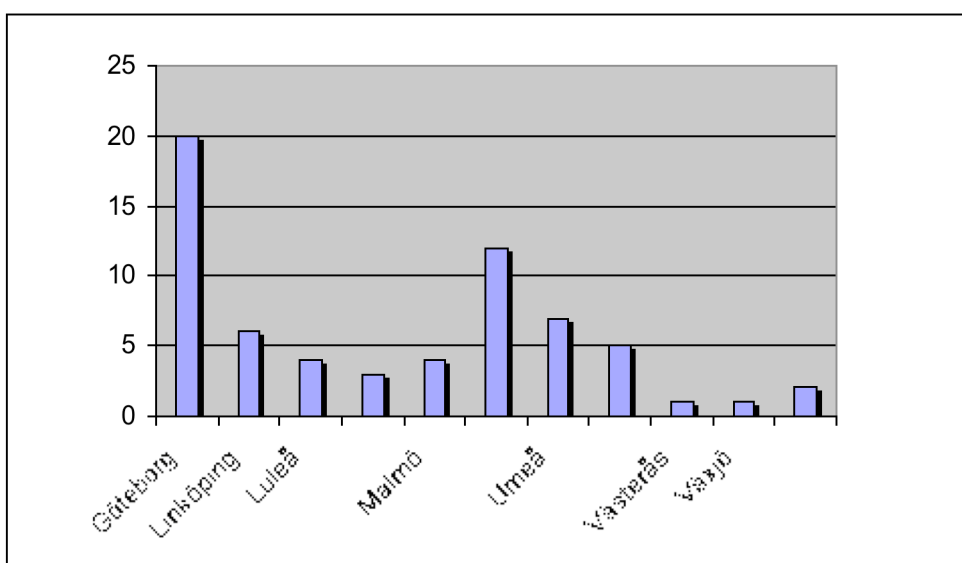
Figur 3. Antal doktorexamina vid svenska lärosäten år 1977-2005 (källa: SCB)



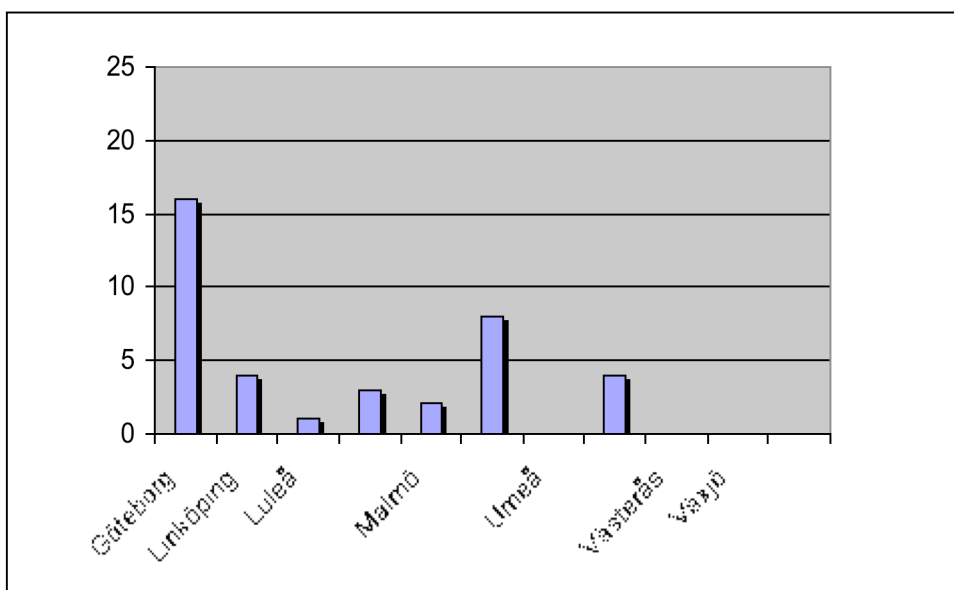
Figur 4. Produktivitet av doktorsexamina vid svenska lärosäten år 1982-2005 (källa: SCB)

Man kan ändå säga att det matematikdidaktiska området utmärker sig genom den för ett land av Sveriges storlek anmärkningsvärt låga akademiska produktionen fram till år 2000, ett "missförhållande" som också Ole Björkqvist (2003) pekade på i sin bild av svensk matematikdidaktisk forskning.

En bild av utvecklingen ges också genom att granska de olika forskningsmiljöerna. Ser vi på alla avhandlingar dominerar Göteborg scenen, med dess starka fenomenografiska tradition, och Stockholm (figur 5a; bokstavsordning, staplar utan namn ska vara Lund, Stockholm, Uppsala och Örebro). Jämför man denna bild med den man får om man ser på tiden före år 2000 framgår tydligt hur nya miljöer växt fram (figur 5b). Ur denna aspekt har det matematikdidaktiska landskapet blivit rikare och mer mångfacetterat. Det är också huvudsakligen vid dessa nya miljöer som matematiska institutioner är aktivt involverade, som en konsekvens av att forskarskolan startade.



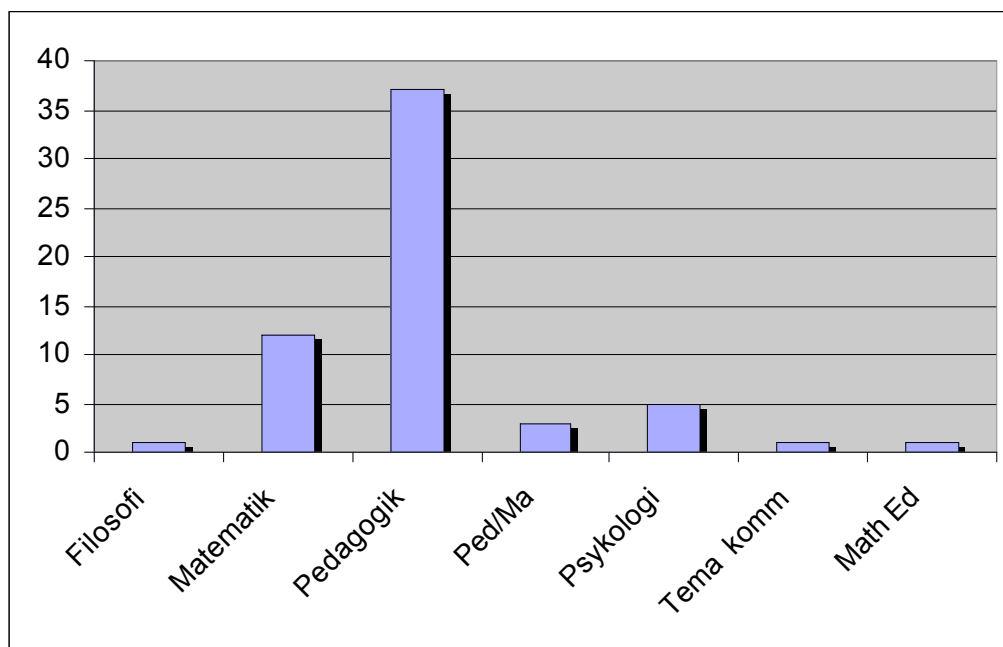
Figur 5a. Antal doktorsexamina inom matematikens didaktik vid svenska lärosäten.



Figur 5b. Antal doktorsexamina inom matematikens didaktik vid svenska lärosäten före 2000.

Vad som utmärker "vår" forskarskola är bland annat denna koppling till ämnesinstitutioner som kompletterar den forskning som bedrivs vid pedagogiska institutioner och lärarutbildningar. Det kan därför vara intressant att se på fördelningen mellan de ämnesområden som avhandlingarna "tillhör" (se figur 6). Vi kan notera här att samtliga 13 avhandlingar som gjorts inom matematik-

ämnet är från de senaste 10 åren, varav 8 inom forskarskolan detta år. Tillsammans med Ped/Ma-kategorin² utgör avhandlingarna med en potentiell extra ”matematisk komponent” jämfört med de rent pedagogikbaserade avhandlingarna cirka en tredjedel av avhandlingarna från och med 1990.



Figur 6. Ämnesområden för svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

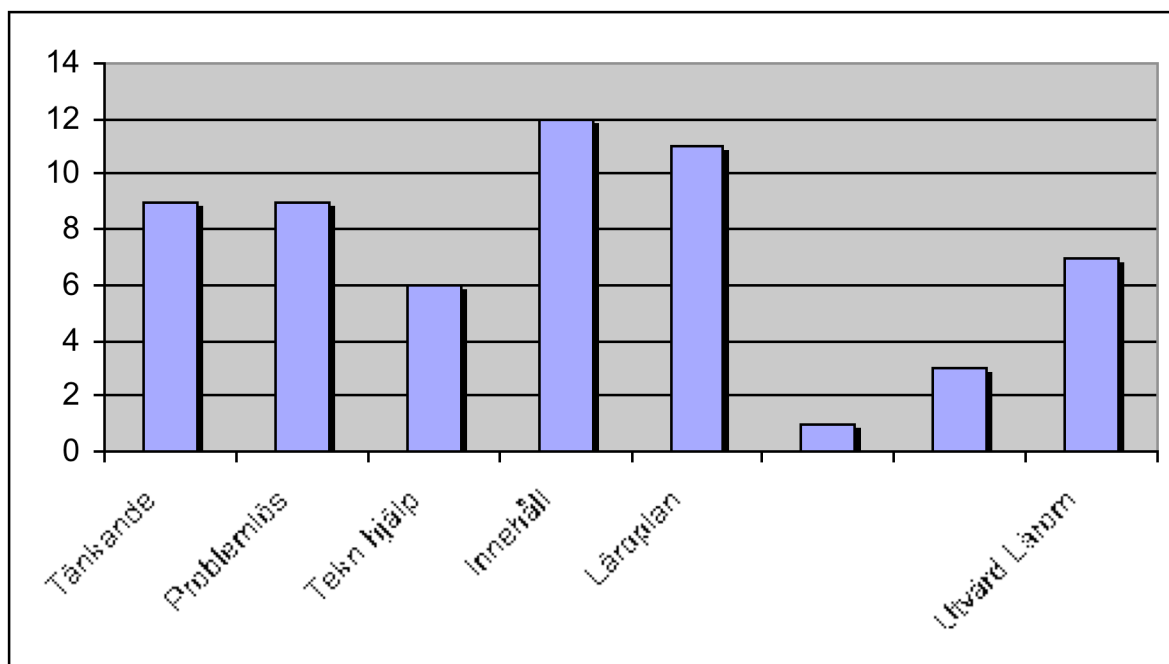
En intressant fråga i detta sammanhang är vilken innebörd som kan läggas i uttrycket en matematikdidaktiskt orienterad avhandling *har en stark matematisk komponent*. Denna problematik nämns av Ole Skovsmose i hans utvärdering av forskarskolans licentiatavhandlingar (Skovsmose, 2006). Han menar att detta kunde ha diskuterats mer explicit inom forskarskolan och att det kommer till uttryck kanske endast inom de matematikhistoriskt inriktade avhandlingarna. En annan väg i denna riktning är det epistemologiska perspektiv som finns representerat framför allt inom den franska forskningen (se mer om detta nedan).

Det finns många olika sätt att kategorisera forskningsobjektet och Gerd Brandell presenterade här en konstruktiv och överskådlig modell baserad på den didaktiska triangeln och dess kontexter på olika nivåer, alltså ett på förhand givet teoretiskt raster inom vilket avhandlingarna passas in. Ett alternativt sätt är att lista olika typer av observerade kategorier som t.ex. Björkqvist (2003):

² Ped/Ma står för den examen som benämns ”Pedagogik med ämnesdidaktisk inriktning”, med hälften av ämnesstudierna i forskarutbildningen i pedagogik och hälften i ett ämne som t.ex. matematik.

- Differentierande och integrerande åtgärder
- Effekt av ny teknologi
- Matematiska ”övertygelser” (beliefs)
- Interaktion i klassrum
- Matematisk kommunikation
- Talförståelse och symbolförståelse
- Problemlösning
- Effekter av kontexter, situerat lärande
- Anpassning läroplan, undervisning, utvärdering

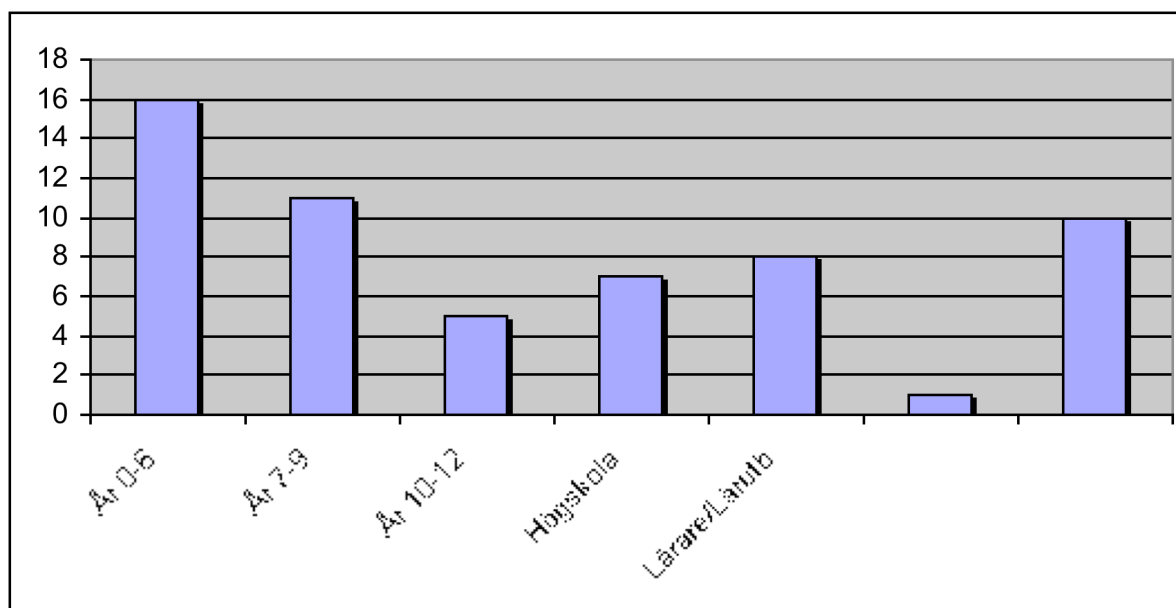
Dessa låter sig dock ganska enkelt placeras i Gerd Brandells schema, utom möjligen ”beliefs”, som kan handla om elevens relation till matematik (alltså den a-didaktiska axeln) men också allmänna uppfattningar om att gå i skola och vara elev. För de kategorier som jag själv identifierade i de 60 avhandlingar jag (översiktligt) tittade på gäller detsamma (figur 7; staplarna utan namn står för ”Uppfattning” resp. ”Klassrum”).



Figur 7. Huvudfokus inom svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

Ofta rör sig en avhandling över flera av dessa fält men jag valde i min räkning endast ett som jag bedömde som huvudfokus. Vi kan konstatera att den kategori som Björkqvist (2003), liksom även jag själv tidigare (Bergsten, 2002), pekade på som en brist, dvs. didaktisk forskning kring matematiska innehållsområden,

fått en förstärkning genom forskarskolan. Det är något som kan och borde förväntas med den starka förankring i matematik som är en medveten satsning för forskarskolan. För svensk matematikutbildning dokumenterat särskilt svaga områden som geometri och algebra syns dock ännu inte så tydligt i forskarskolans doktorsavhandlingar men väl flera licentiatarbeten både inom och utom forskarskolan och pågående doktorsarbeten. Bristen kvarstår ändå när det gäller dessa områden på grundskolenivå. Det skolstadium som stått i fokus i de olika avhandlingarna ses i figur 8 (de högra staplarna står för "Vux" resp. "Blandat").



Figur 8. Utbildningsstadium inom svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

Låt oss titta på en sammanställning av områden och skolstadium (figur 9). Bilden är delvis ofullständig då jag valt att identifiera endast ett huvudfokus per avhandling. Tendensen i forskarskolans placering – matematiskt innehållsorienterat, senare skolstadier, samt teoretisk och metodisk spännvidd – förstärks om man inkluderar licentiat- och pågående arbeten. Men rent allmänt bekräftar tabellen återigen att den svenska forskningen i matematikdidaktik i form av doktorsavhandlingar fortfarande är anmärkningsvärt sparsam – här finns att göra för framtida forskarskolor!

	Tänkande	Probl. lösning	Tekn. Hjälpn.	Innehåll	Läroplan	Uppfattning	Klassrum	Läro-Medel/Bedömn.
0-6	2	3	2	6	1	0	0	1
7-9	2	1	1	1*	2	0	2	2
10-12	1	1	1	1	0	0	0	1
Högskola	3	0	0	2**	1	0	0	1*
Lär/Lärutb	0	1*	2	2*	1	1	1	0
Vux	0	0	0	0	0	0	1	0
Blandat	1	0	0	0	5	0	0	2**

Figur 9. Antal svenska avhandlingar inom matematikens didaktik per utbildningsstadium och huvudfokus. Stjärnorna markerar forskarskolans avhandlingar.

När det gäller just teoretiska och metodologiska aspekter har dom ju för forskarskolans del redan belysts dessa dagar. Att göra en genomgång av alla 60 svenska avhandlingar ur dess aspekter har inte varit möjligt. Jag nöjer mig med att konstatera att de åtta doktorsavhandlingar inom forskarskolan som presenterats och diskuterats dessa två dagar uppvisar en stor spännvidd här och i vissa fall ett teoretiskt förankrat metodologisk utvecklingsarbete. Det finns dock en potentiell risk med sammanläggningsavhandlingar inom didaktisk forskning att, på grund av det begränsade utrymmet i konferensrapporter och (i mindre mån) tidskriftsartiklar, den teoretiska och metodologiska diskussionen görs översiktlig och därmed mer ytlig än man kan förvänta sig i ett doktorsarbete, i de fall den inte är ett huvudsyfte i rapporten. Vi kan också konstatera att vissa internationellt sett starka teoretiska perspektiv är underrepresenterade i svensk forskning inom vårt område:

- Det *epistemologiska* perspektivet har den matematiska kunskapens innehåll, organisation och institutionella förankring som utgångspunkt. Centrala begrepp är didaktisk transposition (Chevallard, 1985; se även Bosch & Gascon, 2006), didaktisk situation och didaktiskt kontrakt (Brousseau, 1997).
- Den *semiotiska* ansatsen har sina rötter i filosofer som Kant, de Saussure och Peirce och fokuserar på uttryck och mening. Inom modern matematikdidaktik företräds perspektivet av t.ex. Raymond Duval, Michael

Hoffman, Norma Presmeg, Luis Radford och Heinz Steinbring (se t.ex. Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006).

- Med rötter hos de sovjetiska psykologerna Vygotsky och Leontiev har *verksamhetsteorin* ('activity theory') vidareutvecklats av t.ex. Engeström (1987) och använts inom bland annat tysk matematikdidaktik.
- Inom social och symbolisk interaktionism utgår man ofta från Vygotskys sociokulturella ansats där lärande inte kan isoleras från den sociala kontexten i vid mening (se t.ex. Yackel et al., 2000).
- *Uppfattningar* om och *attityder* till matematik och lärande och kunnande i matematik ('beliefs') har fått allt större uppmärksamhet internationellt (se t.ex. Pehkonen, 2001) men har i svenska undersökningar hittills mer observerats än analyserats.

Det teoretiska perspektivets innebörd och funktion ser jag som central för en stark utveckling av det matematikdidaktiska forskningsfältet. Det handlar bland annat om frågor om vad som styr valet av teoretisk ansats och en medvetenhet om konsekvenser av dessa val. Internationellt har denna diskussion stärkts på senare år (se t.ex. Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006).

Åter till dom två direkta *produkterna* från forskarskolan, dvs. avhandlingar och forskare. Jämfört med den historiska bild som gavs i Bergsten (2002) och Björkqvist (2003) – ofta isolerade utvecklingsprojekt med otydlig progression, fåtal starka men ofta isolerade enskilda forskare, en bestående stark linje har varit utvärdering och bedömning, stark skolförankring och en koppling till pedagogikämnet – kan nya vägar i framtidens svenska matematikdidaktik förutspås:

- Större internationell förankring (det gäller konferenser, kontakter och publicering när det gäller forskaren, och för avhandlingar tydligare kopplingar till internationell forskning och större tillgänglighet då engelska dominerar – av de 60 avhandlingarna är ca hälften på svenska och hälften på engelska, av forskarskolans hittills 8 avhandlingar är 7 på engelska).
- Större spännvidd (tillsammans med den pedagogiskt baserade forskningen) när det gäller forskningens objekt – skolstadium, övergripande läroplansrelaterade frågeställningar, fördjupad begreppsanalys, teoretiska perspektiv.

- Större potential till fördjupad utveckling och påverkan genom den låga medelåldern vid disputation jämfört med traditionen inom pedagogikämnet (förutsatt att man hittar en position att verka i). Redan nu verkar dom nyblivna doktorerna inom olika typer av institutioner där dom kan få stort inflytande på utvecklingen av matematikutbildningen i Sverige.

Det finns också problem och kritiska frågor som kräver en öppen diskussion, till exempel:

- Balansen och kopplingen mellan en matematiskt respektive en pedagogiskt förankrad matematikdidaktik: samförstånd/samarbete eller missförstånd?
- Från matematikpedagoger till matematikdidaktiker – är det en bra utveckling? Konsekvenser för praktiken? Hur är detta kopplat till det ofta uttalade målet att undervisa i matematik på vetenskaplig grund, och till uttrycket den professionella läraren?

För att avsluta där jag började, med metaforen i titeln, kan vi beskriva matematikdidaktikens vägar genom bilden av en ganska obetydlig väg som dyker upp någonstans i det förflutna men som så småningom breder ut sig alltmer. Vi har sett vad som bidragit till denna breddning – en tillväxt när det gäller forskningens aktörer, miljöer, objekt, teoretiska perspektiv och metoder, kanske också dess utgångspunkter och konsekvenser. Dessa senare förtjänar att uppmärksammas extra då det där inte bara finns möjligheter utan kanske också döljer sig risker. Det handlar om matematikdidaktikens *dubbla natur*, denna kombination av *logos* och *praxis*, som nämndes dels i samband med Niss definition av matematikens didaktik, dels i Lesters dynamiska modell av forskningen. Det är vårt områdes val om de matematikdidaktiska vägarna leder in i ett ingenmansland eller kan bli en genererande kraft, och därmed även forskarskolan, i en positiv utveckling av matematikutbildning, både i ett svenskt och internationellt perspektiv.

Referenser

- Bergsten, C. (2002). Faces of Swedish research in mathematics education. In C. Bergsten, G. Dahland & B. Grevholm (Eds.), *Research and action in the mathematics classroom. Proceedings of Madif 2* (pp. 21-36). Linköping: SMDF.
- Bikner-Ahsbabs, A. & Prediger, S.: 2006, 'Diversity of theories in mathematics education – How can we deal with it?', *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 38(1), 52-57.

- Björkqvist, O. (2003). Mathematics education in Sweden: A review of research and developmental work. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Challenges in mathematics education. Proceedings of Madif 3* (pp. 7-14). Linköping: SMDF.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of didactic transposition. *ICMI Bulletin No. 58, June 2006* (pp. 51-65). International Commission of Mathematical Instruction.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding. An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-kons.
- Hogben, L. (1962). *Matematikens vägar*. Stockholm: Forum.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the New Mathematics*. St. Martin's Press.
- Lester, F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37*, 457-467.
- Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningen karaktär och status. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 21-47). Lund: Studentlitteratur.
- Pehkonen, E. (2001). Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 230-253). Lund: Studentlitteratur.
- Saenz-Ludlow, A. & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 1-10.
- Skovsmose, O. (2006). Graduate school in mathematics education. *Research Reports in Mathematics Education, No. 1, 2006*. Matematiska institutionen, Umeå universitet.
- Yackel, E., Cobb, P. & McClain, K. (Eds.) (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.