School of Mathematics and Systems Engineering

**Reports from MSI** - Rapporter från MSI

Licentiatavhandling

# Elevers förståelse av en slumpsituation

En fallstudie av hur elever i årskurs 7 tolkar och hanterar aspekter av sannolikhet aktualiserade i ett tärningsspel

Per Nilsson

Dec
2003

MSI
Växjö University
**SE-351 95 VÄXJÖ**

Report 03119
ISSN 1650-2647
ISRN VXU/MSI/MA/R/--03119/--SE

## Sammanfattning
Denna studie har undersökt årskurs 7 elevers sätt att hantera aspekter av sannolikhet aktualiserade i en experimenterande situation. Åtta elever uppdelade i fyra stycken tvågrupper arbetade med att optimera strategier för att öka sina chanser att vinna i ett tärningsspel, som utgick från summan av två tärningar. Undersökningssituationen var uppdelad i fyra omgångar, med en ny uppsättning tärningar i varje omgång. Tärningarna var designade i syfte att aktualisera olika aspekter av sannolikhet samtidigt som eleverna gavs tillfälle att möta små förändringar i matematisk struktur mellan olika situationer.

Hur elever förstår och utvecklar begrepp betraktas i situationen utifrån det sätt på vilket elevers förståelse varierar med deras tolkningar av den situation i vilken begreppen förekommer. En sådan meningsskapande process beskrivs i studien i termer av differentiering och kontextualisering. Kontext ges i ett sådant sammanhang betydelsen av elevers personliga konstruktioner, där de begrepp som aktualiseras i en lärsituation faller inom ramen för den *begreppsliga* delen av kontexten, på samma sätt som föreställningar av lärsituationen hör till den *situationella* och uppfattningen av normer och värderingar till den *kulturella* kontexten (Halldén, 1999).

Med utgångspunkt i detta lärperspektiv syftar studien till att förklara elevers sätt att uppfatta och hantera aspekter av sannolikhet; att beskriva elevers olika sätt att kontextualisera uppgifter som aktualiserar sådana aspekter, givet de begreppsliga och situationella/kulturella resurser som står till deras förfogande.

Empiriska data har analyserats med intentionell analys, en metod som utgår ifrån att elevernas agerande betraktas som intentionellt. Genom att tillskriva eleverna intentioner kan vi rimliggöra deras handlingar och därmed ge stadga åt strukturen över tolkningsarbetet.

Analysen visar det väsentliga i att ställa elevers begreppsliga repertoar i förhållande till det sätt på vilket eleverna processar och ställer information till sitt förfogande. Elevernas uppfattning av aspekter av sannolikhet måste ställas i relation till elevernas sätt att skapa mening i en uppgiftssituation.

## Abstract
In this study seventh grade students' ways of handling aspects of probability have been investigated. The aspects in question were embedded in an experimental environment. Eight participants were divided into four groups with two students in each group. In the group work they were up to explore optimal strategies for winning a dice game, based on the sum of two dice. The situation included four different set-ups of dice. The dice were designed to bring to the fore different aspects of probability and simultaneously give the students the opportunity of encountering small differences in mathematical structure between different situations.

How children understand and develop concepts, within the situation, is regarded from the perspective of how students' understanding varies with their interpretation of the situation, in which the concepts are embedded. Such meaning-making processes are described in the study in terms of differentiation and contextualisation. Here context refer to students' personal constructions, where the *conceptual* context denotes constructions of concepts actualized in a study situation, as well as the *situational* context denotes interpretations of the setting in which learning occurs and the *cultural* context refers to constructions of discursive rules (Halldén, 1999).

With respect to that learning perspective the aim of this study is to explain students' ways of handling aspects of probability; to describe students' different ways of contextualising tasks that actualise such aspects, given the conceptual and situational/cultural resources being at their disposal.

Empirical data have been analysed with intentional analysis, a method by which we regard students' acts as intentional. By ascribing intentions to students we can make sense of their actions and also give steadiness for the structure of our interpretations.

The analysis shows the importance of putting students' conceptual repertoire in relation to the way they process and bring to the fore information. The students' understanding of aspects of probability has to be regarded with respect to their meaning-making processes in a study situation.

**Tack**

Först av allt vill jag tacka Håkan Sollervall och Inger Wistedt som på ett inspirerande och betydelsefullt sätt väglett mig genom arbetet. Jag vill också tacka Lennart Hellström och Erika Stadler som båda givit mig värdefulla synpunkter. Sådana synpunkter vill jag också tacka Torbjörn Fransson för och i anslutning till detta också visa min uppskattning för ett gott samarbete under hela universitetstiden. Vidare vill jag tacka Anders Tengstrand som med sitt engagemang i didaktiska frågor på ett betydelsefullt sätt bidrar till vår miljö. Jag vill också tacka Riksbankens Jubileumsfond för det ekonomiska stöd man ger till den nationella forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning. I anslutning till detta, tack till ledningsgruppen och alla deltagare i forskarskolan för inspirerande möten vid konferenser och kurser.

Avslutningsvis vill jag rikta mina varmaste uppskattningar till min familj som genom sin närvaro stöttar mig på alla tänkbara sätt. Tack Ingrid, Filip och Jakob.

1 Inledning 4

2 Möten med slump – två perspektiv 5

2.1 Intuitiva bedömningsmetoder och subjektivitet ... 7

2.2 Matematikdidaktiska perspektivet ... 9

2.2.1 Matematisk modellering ... 9

2.2.2 Matematikdidaktik - sannolikhetstänkande ... 14

2.2.3 Intuitiva modeller ... 16

2.2.4 Matematikdidaktiska forskningsresultat ... 18

3 Teoribakgrund 21

3.1 Alternativa referensramar och missuppfattningar ... 21

3.2 Kontextualisering och differentiering ... 22

4 Syfte 26

5 Metod för datainsamling 26

5.1 En förberedande studie – uppgift och studiens design ... 26

5.1.1 Datainsamling ... 26

5.1.2 Förberedande studie – resultat och överväganden ... 27

5.2 Variationsteori ... 28

5.3 Aktuell design ... 30

5.3.1 En a priori analys av aktuell design – ett uppgiftssystem ... 30

6 Analysmetod 39

6.1 Intentionell analys ... 39

6.2 Presentation av data ... 41

7 Resultat och analys 41

Omgång 1 – gula uppsättningen ... 41

Omgång 2 – röda uppsättningen ... 45

Omgång 3 – blå uppsättningen ... 49

Omgång 4 – Vita uppsättningen ... 52

Analyssammanfattning ... 56

8 Diskussion 57

8.1 Hur elever i årskurs 7 hanterar aspekter av sannolikhet ... 57

8.2 Metoddiskussion ... 60

8.2.1 Metod för datainsamling ... 60

8.2.2 Diskussion av analysmetod ... 62

8.3 Implikationer för skolundervisningen ... 62

8.4 Framtida studieobjekt ... 63

9 Referenslista 64

# 1 Inledning

En av flera populära metaforer beträffande kognition och kognitiv utveckling liknar tänkandet med funktionen av en schweizisk armékniv. I denna metafor tänker man sig en individs föreställningsvärld som uppbyggd av diskreta moduler, tankestrategier, och kopplingar dem emellan. Med utgångspunkt i denna liknelse vill Gilovich och Griffin (2002) bemöta den kritik som det s.k. missuppfattningsperspektiv de företräder varit föremål för. De menar att om tänkandet beskrivs som att agenten applicerar olika verktyg för att lösa olika uppgifter så kommer det att produceras ett mönster av bedömningsmetoder, liknande de som blivit dokumenterade i den heuristiska och subjektivistiska forskningstraditionen. På samma sätt som med en armékniv så är vissa moduler mer lämpliga än andra beroende på vilka uppdrag som skall utföras. Vid en del tillfällen så appliceras rätt verktyg på kniven för rätt ändamål och ett tillfredsställande resultat erhålls. Vid andra tillfällen så kanske fel modul tillämpas vilket, givetvis, många gånger leder till ett felaktigt resultat. Ett tredje alternativ vore att rätt modul inte ens finns tillgänglig för att hantera ett specifikt problem. I ett sådant fall hänvisas man till att ta hjälp av den ”näst” bästa modulen, vilket också kan resultera i ett inte helt tillfredsställande agerande (*ibid.*).

Vi kan tolka Gilovich & Griffin som att det inte är kniven och dess moduler i sig som löser en uppgift. Lika viktigt blir det sätt på vilket man sovrar bland och tolkar den information som framträder i situationen i fråga. Relationen mellan individers ämnesspecifika kunskaper, dvs. kunskaper om de potentiella hjälpmedel som kniven innehåller, och uppfattningar om den aktuella uppgiftssituationen blir således avgörande för ett lyckat agerande.

I linje med detta metaforiska resonemang finner vi också ett av skolans huvudsakliga utbildningsmål. I läroplanen för matematikämnet går nämligen att läsa, under ämnets syfte och roll, att:

> Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. (Skolverket, 1998)

Att vara förberedd och att kunna hantera den typen av situationer innebär att eleverna behöver utveckla generella kvalitéer såsom förmåga och vilja att planera, experimentera och upptäcka i sin omgivning. I läroplanen beskrivs det därför som väsentligt att låta elever konfronteras med och använda sig av enkla matematiska modeller samt att kunna kritiskt granska modellers förutsättningar, begränsningar och användning för att utveckla en förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande (*ibid.*). Till detta kan tilläggas det väsentliga i att lära sig betrakta och förhålla sig till verkliga situationer utifrån den idealisering av omvärlden som matematiken beskriver, då den behandlar och utgår från ideala, abstrakta operationer och enheter (Fischbein *et al.*, 1991).

I linje med ovan finner jag tre huvudsakliga anledningar till att konfrontera elever med en situation som bär på element av osäkerhet. För det första, och i linje med läroplanen, så kan insikter i aspekter av sannolikhet ses som ytterst relevanta faktorer i vardagliga beslutsprocesser. För det andra så är sannolikhetsområdet en del av matematiken, innehållande formellt definierade objekt (*ibid.*). De matematiska objekt som kommer att ligga till grund för den aktuella studien kommer jag att redogöra för under avsnitt 2.2. För det tredje så har denna typ av situationer under en längre tid varit föremål för en diger kartläggning av olika missuppfattningar. Denna kartläggning kommer jag att ge en översikt av under nästa kapitel.

Baserat på ovanstående diskussion så syftar denna studie till att beskriva hur elever i grundskolans årskurs sju tolkar och hanterar uppgifter där begreppet sannolikhet aktualiseras: hur de förstår och utvecklar sin förståelse av begreppet och hur deras förståelse varierar med deras tolkningar av den situation i vilken begreppet förekommer.

Jag har valt att konfrontera elever med en spelsituation, där slump genereras av tärningar. Speciellt kommer studien att vara inriktad mot den typ av experimentella situationer som innehåller kombinerade slumpförsök, som kast med två tärningar, då dessa stimulerar fenomen, intressanta att undersöka ur ett sannolikhetstänkande perspektiv (*ibid.*).

# 2 Möten med slump – två perspektiv

Stor del av den tidigare forskningen, av hur individer agerar i sannolikhetssituationer, kan sägas vara uppdelad i två perspektiv. Det ena är det psykologiska/kognitiva perspektivet, innehållande Kahneman och Tversky's arbeten (Kahneman & Tversky, 1972; Gilovich *et al.*, 002). Inom denna tradition fokuseras mönster i tänkandet och identifiering av missuppfattningar och strategier i situationer av osäkerhet. Beträffande den aktuella studien kommer inriktningens mest relevanta resultat att redovisas och diskuteras under avsnitt 2.1. Det andra är det matematiska eller matematikdidaktiska perspektivet. Här har intresset mer varit inriktat mot lärande av sannolikhet och hur instruktion kan påverka en utveckling av tänkandet kring aspekter av detta (Keeler och Steinhorst, 2001):

> Researchers in mathematics and statistics education are … natural interveners … not usually content just to observe the troubles … rather, they wish to change students' conceptions and beliefs about probability and statistics. (Shaugnessy, 1992, s. 469)

Det psykologiska perspektivet har utvecklat ett omfattande ramverk för hur människor agerar och använder sig av subjektiva heuristiker, bedömningsmetoder, i situationer av osäkerhet. Perspektivet har i och med detta influerat forskningsarbeten gjorda av matematikdidaktiker. Det matematikdidaktiska perspektivet verkar emellertid haft ringa påverkan på det psykologiska då det sistnämnda verkar hålla fast vid tesen att missuppfattningar är svåra att bli av med.

Keeler och Steinhorst (2001) anser att den motsättning som synes råda mellan de båda perspektiven grundar sig i de skilda sätt som de båda perspektiven designar sina respektive undersökningssituationer. Den typ av uppgift som utnyttjas av psykologerna menar man mäter en force-choice respons medan didaktikers uppgifter är av öppnare karaktär, som stimulerar tänkandet på ett annat sätt. Ett försök att beskriva och undersöka detta fenomen, beträffande uppgiftsdesignen, gjordes av Cosmides och Tooby (1996) då de konfronterade studenter med en uppgift, välkänd i litteratur över strategier och missuppfattningar, formulerad på tre olika sätt. Den första versionen var en direkt replikering av en tidigare studie gjord av Casscells, Schoenberger och Graboys (refererad i Cosmides och Tooby, 1996):

> If a test to detect a disease whose prevalence is 1/1000 has a false positive rate of 5%, what is the chance that a person found to have a positive result actually has the disease, assuming that you know nothing about the person's symptoms or signs?

I den andra uppgiftspresentationen gavs deltagarna betydligt utförligare beskrivningar av ingående data och även möjlighet till tolkning i termer av frekvenser:

> 1 out of 1000 Americans has disease X. A test has been developed to detect when a person has disease X. Every time the test is given to a person who has the disease, the test comes out positive (i.e., the “true positive” rate is 100%). But sometimes the test also comes out positive when it is given to a person who is completely healthy. Specifically, out of every 1000 people who are perfectly healthy, 50 of them test positive for the disease (i.e., the “false positive” rate is 5%). Imagine that we have assembled a random sample of 1000 Americans. They were selected by a lottery. Those who conducted the lottery had no information about the health status of any of these people. Given the information above, on average.
> How many people who test positive for the disease will actually have the disease?

Det tredje sättet som uppgiften presenterades på skilde sig från det andra endast i de avslutande frågeställningarna. Syftet med dessa var att med hjälp av småstegsuppdelning få deltagarna att fokusera avgörande aspekter i uppgiften:

Given the information above, on average.

1. How many of these 1000 people will have the disease?
2. How many of the 1000 people will have the disease AND test positive for it?
3. How many of the 1000 people will be healthy AND test positive for the disease?
4. How many of the 1000 people will test positive for the disease, whether they have the disease or not?
5. How many people who test positive for the disease will actually have the disease? ___ out of ____

Cosmides och Tooby ville undersöka huruvida en högre andel lösningar i enlighet med bayes’ sats kunde framkallas genom att få deltagarna att tänka i frekvenser. Det psykologiska/kognitiva perspektivet har nämligen funnit att som uppgiften presenteras i alternativ 1 så tenderar man många gånger att ignorera den mest grundläggande informationen (eng. base-rate information) i liknande uppgifter (här sjukdomens förekomst som endast 1/1000). Cosmides och Tooby lyckades med att både återge den ursprungliga studiens resultat (Casscells, Schoenberger och Graboys) och med att påverka dessa resultat i den riktning man önskat, dvs. få deltagarna att också reflektera över uppgiftens grundförutsättningar som sjukdomens utbredning. Precis som Cosmides och Tooby själva poängterar, så tydliggör man i formuleringarna 2 och 3 en hel del av den information som varit implicerad i alternativ 1. Formuleringarna 2 och 3 styr också avsiktligt in deltagarna mot att tänka i frekvenser. Istället för att ge respons på frågan *vad är sannolikheten att en person har…?* så svarar eleverna på frågan *hur många människor av…?* De båda sista alternativen förutsätter vissa antaganden som i den ursprungliga uppgiftsformuleringen inte på förhand var given, som exempelvis att det finns en i stickprovet som har sjukdomen.

Men, oavsett dessa invändningar i sannolikhetsteoretiska resonemang så aktualiserar undersökningen det aktuella studieobjektet. Precis som Keeler och Steinhorst (2001) poängterat, och som Cosmides och Tooby understryker, så ligger uppgiftsdesignen till grund för mycket av det resultat man erhåller. Nu skall det dock poängteras att den aktuella studien inte syftar till att utvärdera olika didaktiska situationer. Men då vi kan argumentera för att de tre olika uppgifterna ovan har erbjudit eleverna tre olika typer av information så kan vi också tänka oss att eleverna tolkat informationen, och därmed uppgifterna, olika. Det är utifrån detta perspektiv som jag finner det relevant att gå vidare med att titta på elevers begreppsutveckling, mer specifikt, att undersöka det sätt på vilket elever löser en uppgift utifrån det sätt på vilket de uppfattar och tolkar uppgiften och hur de placerar uppgiften i ett sammanhang.

Men innan jag går vidare med att precisera studiens teoretiska ramverk ytterligare så finner jag det lämpligt att, i all korthet, gå igenom de för den här studien mest relevanta resultat som de båda perspektiven påvisat.

## 2.1 Intuitiva bedömningsmetoder och subjektivitet

Låt oss anta att du ur en låda med lika många röda som blå kulor skall dra sex kulor slumpvis, och att du efter varje dragning lägger tillbaka kulan i lådan igen. Sannolikheten att få tre röda och tre blåa kulor blir vid en sådan händelse högre än att få, låt oss säga, fem röda och bara en blå. Men detta gäller bara om vi inte bryr oss om i vilken inbördes ordning vi dragit de båda färgerna. Sannolikheten att erhålla någon av de speciella följderna RRRBBB eller RRRRRB är således lika. Sannolikheten för varje följd, vilken som helst (om vi tar hänsyn till ordning), är i situationen i fråga alltid lika med $0.5^6$. Men, följderna RRRBBB och BBBRRR, som alltså har samma sannolika utfall, har båda bidragit till den totala sannolikheten för händelsen, att dra tre blåa och tre röda kulor. Det totala antalet möjligheter för detta är:

$$\binom{6}{3} = 20$$

vilket skall ställas mot de sex olika sätt man kan få fem röda och en blå kula. Därav inses att det är mer troligt att få en följd som, oberoende av ordningen, innehåller tre röda och tre blå än en följd med bara en blå och fem röda.

Detta inledande resonemang kan tyckas ganska självklart. Vad flera undersökningar dock har visat är att människor är benägna att öka sin tilltro att få en blå kula efter att först fått tre stycken röda. Denna missuppfattning, som kallas *gambler's fallacy* (här negative gambler's fallacy), grundar sig i en bedömningsmetod som benämns *representativeness* (Kahneman & Tversky, 1972; Gilovich *et al.*, 2002). I fallet med de röda och blå kulorna så kan vi se denna heuristik komma till uttryck på två sätt. Det första är att individer ofta baserar sina bedömningar på hur väl ett utfalls eller stickprovs relativa frekvens speglar en speciell process karaktäristiska egenskaper. Utifrån denna tolkning så tillskrivs följden RRBRBB högre sannolikhet än följden BRRRRR beroende på att den på ett bättre sätt tycks spegla den egenskap som ligger till grund för processen, här att chansen är 50-50 vid en dragning. I fallet med negative gambler's fallacy så vill man utifrån detta balansera ut följden mot denna egenskap. Av den anledningen sätts högre tilltro till att, efter tre röda kulor, få en blå. Ett annat sätt vi kan se representativeness komma till uttryck på är att individer tenderar att vilja matcha ett utfall eller ett stickprov mot en modell över en hel klass av utfall. Beträffande detta sätt att göra bedömningar i osäkra situationer så anses det vara troligare att erhålla följden BRRBRB än exempelvis följden RRRBBB då den förstnämnda på ett bättre sätt tycks spegla de egenskaper som förknippas med slumpprocesser. På liknande sätt kan man argumentera för varför spelare på lotto hellre väljer att fördela sina sju nummer utspritt över en spelbricka istället för att välja de sju första numren. Även om alla rader är sinsemellan lika sannolika så har man helt enkelt sett fler oregelbundna lottorader än rader med numren i följd. Denna intuition, förvärvad genom varseblivning, vill man sedan se bli representerad i de nya rader man önskar fördela. Vi kommer att se ytterligare prov på denna heuristik då jag redovisar resultat från det matematikdidaktiska perspektivet.

En annan bedömningsmetod som varit föremål för undersökning baseras på hur lätt man kan dra sig till minnes eller göra relevant information tillgänglig från tidigare erfarenheter. Denna heuristik kallas för *availability* (Gilovich *et al.*, 2002) och innebär exempelvis att vi är mer benägna att ställa högre förhoppningar till ett lotteristånd om vi kan erinra oss att ha vunnit där tidigare. På samma sätt finner vi det mindre troligt att vi vinner en bortamatch i fotboll om vi kan dra oss till minnes hur svåra tidigare möten varit. Vi finner även spår av metoden i situationer av mer komplex kombinatorisk natur. Individer utan formell kunskap på området och som ställs inför uppgiften om de, utifrån en grupp om tio personer, ser någon skillnad i antalet sätt att bilda delgrupper om två eller åtta i varje svarar oftast att grupper om två ger fler alternativa delgrupper. En förklaring till detta är den tillgänglighetsgrundade bedömningsmetoden; det är lättare att konstruera exempel av tvågrupper än av åttagrupper (Shaughnessy, 1992).

Ett tredje intressant, och för den här studien högst relevant, forskningsresultat inom området har visat på en föreställning där man tenderar att fördela händelsers sannolikhet *equiprobable* (likformigt) över möjliga utfall (Lecoutre, 1992). Jag kommer fortsättningsvis att använda mig av den engelska benämningen *equiprobability* för detta fenomen då det är ett vedertaget begrepp i matematikdidaktiska sammanhang. Lecoutre har i huvudsak undersökt hur denna uppfattning påverkas av systematisk variation i experimentella faktorer men också hur den förhåller sig mellan olika grupper av försökspersoner. Utifrån hennes tidigare resultat stöds denna missuppfattning oftast av en chansmodell. Med avseende på denna modell anses en situation vara equiprobable beroende på att den bakomliggande processen uppfattas som bara vara en fråga om chans.

Då detta varit ett tongivande argument bland deltagarna vill Lecoutre undersöka om uppfattningen är stabil även då chansmomentet, eller slumpegenskapen, i frågeställningen maskerats. Istället för att låta eleverna ge respons på tärningsutfall eller färgade kort dragna ur en urna, s.k. standardproblem, så låter hon dem istället göra sina bedömningar utifrån konstruktioner. I den första situationen läggs det ner tre kort i en låda, där två av korten har bilden av en triangel och ett kort bilden av en kvadrat. Frågan här gäller om eleverna tror sig ha större chans att kunna konstruera ett hus än en romb, eller om dem anser det vara lika stor chans för båda, efter att ha dragit två kort ur lådan, utan återläggning. Som uppföljning på detta konfronterar hon sedan eleverna med en mer standardbetonad uppgiftsformulering; två apelsinfärgade godisbitar och en citronfärgad läggs i en låda varpå frågan lyder om eleverna tror att det är:

- lika stor chans att få en citron- och en apelsinfärgad bit som att få två apelsinfärgade?
- större chans att få en av varje?
- större chans att få två apelsinfärgade?
  Om det är omöjligt att svara så förklara varför.

Som tredje och avslutande frågeställning ombads sedan eleverna att jämföra och förklara relationen mellan de båda situationerna, om de såg dem som lika eller olika. Med avseende på det sistnämnda fallet ville hon också att eleverna skulle svara på varför de såg dem som olika.

Beträffande det sätt på vilket den första frågeställningen presenterades fann Lecoutre en ansenlig minskning av equiprobable respons. Här får hon 75 % riktiga svar från eleverna, vilket skall jämföras med tidigare undersökningar då försök till att påverka denna uppfattning på sin höjd gett 50 % riktiga svar. I elevsvaren på den andra uppgiften så minskade den korrekta andelen, även om den var betydligt högre än vid tidigare undersökningar. Detta ska ställas i relation till den tredje frågeställningen, där eleverna ombads jämföra de båda tidigare frågeställningarna. Bland 70 % av eleverna uppfattades situationerna som lika medan 24 % såg dem som olika. Resterande 6 % gav svar som varken gick att relatera till om eleverna ansåg situationerna som lika eller olika. Mest intressant finner jag, i överensstämmelse med Lecoutre, att de som gav samma respons, rätt eller fel, på båda uppgifterna också uppfattade situationerna som lika medan 60 % av de som uppfattade situationerna som olika också gav olika respons på dem. Resterande, vilka gav olika respons men uppfattade situationerna som lika, visade på osammanhängande resonemang eller uteblev med ytterligare förklaring. Det sätt på vilket eleverna tolkar och uppfattar uppgiftssituationer, och relationer dem emellan, kan således ses som avgörande för vilka matematiska aspekter som aktualiseras i elevernas resonemang.

Lecoutre anser att man kan bli tvungen att göra situationerna än mer lika för att tydliggöra likheterna i matematisk struktur. I likhet med tidigare studier finner hon att elevernas olika sätt att agera i och mellan de olika situationerna har sin grund i användandet av följande strategier och tankemodeller:

1. Korrekt modell – Ser situationerna som lika och för ett korrekt logiskt och kombinatoriskt resonemang över båda.
2. Konstruktion vs chansmodell – Ser situationerna som olika. För ett logiskt eller konstruktionsbaserat resonemang över den första medan man ser den andra situationen som uppbyggd på ren chans.
3. Betingad modell – Deltagarna använder samma felaktiga modell i båda uppgifterna. Modellen innebär att vid två dragningar kommer minst ett av de element som är identiska att uppstå. Sedan återstår ett element av varje varför man felaktigt drar slutsatsen att man har lika stor chans att få båda kombinationerna.
4. Chansmodell – Man uppfattar båda situationerna endast som en fråga om ren chans.
5. Nummermodell – Man utgår i båda situationerna ifrån att det är större chans att få ett par med två identiska element då det finns ett större antal av dem.

Lecoutres studie har visat att det med experimentella trick, här att maskera chansaspekten i ett flerstagsförsök, går att få eleverna att utnyttja lämpliga tankemodeller som verktyg i sina bedömningar. Oftast finns korrekta modeller tillgängliga. Det gäller ”bara” att få dem aktiverade.

Anledningen till att jag har valt att placera resultaten från Lecoutre under denna rubrik är att hennes huvudfokus varit riktat mot en speciell missuppfattning, beträffande equiprobability. Vi kommer dock att se att det modellperspektiv hon håller som grund för elevers tänkande i flera avseenden överensstämmer med de resultat som kommer att presenteras under nästa avsnitt.

## 2.2 Matematikdidaktiska perspektivet

### 2.2.1 Matematisk modellering

Arbeten gjorda över bedömningsmetoder (heuristiker) kan sägas vara inriktade på *hur* vi, intuitivt och erfarenhetsbaserat, agerar i slumpinfluerade situationer. Det vi här skall försöka lyfta är ett resonemang över hur vi *borde* agera i situationer av osäkerhet och vad som kan stimulera att ett sådant agerande utvecklas i en lärprocess.

Nu är inte frågan om hur vi borde agera, utifrån ett sannolikhetsteoretiskt perspektiv, så lätt att besvara då olika filosofiska traditioner på detta område utgår från olika villkor i sina grundantaganden. Flera ansatser till att sammanställa denna minst sagt debatterade process har gjorts, med viss åtskillnad i sätt att kategorisera de filosofiska positionerna (Ritson, 1998). Ett inledande exempel får tjänstgöra i avsikt att placera diskussionen.

Tänk dig att du står inför situationen att du skall finna en bok skriven av Astrid Lindgren på ett bibliotek med 100.000 böcker varav 100 är skriva av nämnda författarinna. Detta kanske inte ställer dig inför några svårigheter vad gäller det räknetekniska. Utifrån de premisser som ur ett matematiskt perspektiv är explicit givna så får vi att sannolikheten är en på tusen för att en slumpvis utvald bok skall vara skriven av Astrid Lindgren. Men om man nu utvidgar sin modell till att även innehålla tidigare erfarenheter av såväl bibliotek som av Astrid Lindgrens författarskap så skulle vi få en helt annan bild av händelsen att finna en bok skriven av henne. För om man även tar med som implicit premiss att du som person vet att i ett av bibliotekets alla rum så har man placerat barnböcker, så kommer detta med all säkerhet rendera en helt annan, och kanske mer relevant, sannolikhet för händelsen. Man skulle också kunna tänka sig en ansats där man istället lutar sig mot data som framkommit efter att ha undersökt ett stort antal bibliotek för att ur detta sedan tilldela händelsen sannolikhet utifrån den relativa frekvens som framkommit. Även om nu inte detta exempel belyser alla aspekter och motsättningar mellan de olika perspektiven så visar det dock på en del skillnader i synsätt. Borovcnik *et al.* (1991) väljer att göra följande indelning av olika sannolikhetsperspektiv;

- Klassiskt perspektiv – En a priori ansats mot sannolikhet med fokus på symmetri som bär på ett implicit antagande om utfallens lika sannolikhet.
- Frekvensperspektiv – Som är en posteriori ansats i den mening att den tilldelar en händelse sannolikhet utifrån dess relativa frekvens.
- Subjektivistiskt perspektiv – Som poängterar att händelsers sannolikheter inte kan ses som en gradering av verkligheten utan även måste involvera komponenter av subjektets tänkande.
- Strukturell ansats – Som innebär en axiomatisering av området, med sannolikheter härledda från andra sannolikheter via matematiska teorem.

De båda första perspektiven kallas objektiva då deras grundantaganden implicerar en objektifierad sannolikhet, fri från vårt eget tänkande, till skillnad från den subjektivistiska synen. Blickar vi tillbaka på det inledande exemplet över händelsen att finna en bok skriven av Astrid Lindgren, beskriver det första och tredje fallet en objektiv ansats med den klassiska först. Det andra fallet, innehållande information om barnböcker, håller en subjektivistisk position. Den strukturella ansatsen klargör inte själva sannolikhetens ursprung utan ses istället endast som det teoretiska ramverk man bygger vidare på vare sig man valt en subjektiv eller objektiv ansats i sina filosofiska föreställningar (*ibid*).

Den subjektivistiska synen på sannolikhet förnekar dock inte betydelsen av symmetri eller frekvens, båda ses även här som viktiga komponenter i bedömningar av sannolikhet. Väsentligt är emellertid att göra dessa aspekter explicita och att använda dem med försiktighet (*ibid*). Oavsett vilka filosofiska antaganden man gör kan man alltså identifiera en del specifik matematisk teoribildning som är relativt vedertagen, och som kan ses som ett gemensamt språk, accepterat av de flesta positioner. Därför väljer jag här först att ge en övergripande beskrivning av denna bakomliggande matematik, för att utifrån denna diskussion sedan låta forma den aktuella studiens matematiska ansats.

Den matematiska verksamhet som här kommer att fånga vårt intresse är som i inledningen antytts matematisk modellering. Vare sig man utgår från objektiva eller subjektiva grundantaganden så måste situationen på ett eller annat sätt konstrueras för att kunna analyseras och vidare syntetiseras. Det som kännetecknar sannolikhetsmodeller är att de behandlar element av osäkerhet, dvs. någon typ av slumpfaktor. Förmågan att kunna avgöra om en händelse eller sekvens innehåller slump eller inte blir därför avgörande då slumpmässighet både måste ses som utgångspunkt för sannolikhet (Batanero, 1996) och som avgörande för valideringssprocessen då en modell över en slumpsituation inte går att testa på ett lika direkt sätt som vid en deterministisk modell (Borovcnik et al., 1991); ”One cannot solve a problem until one identifies the nature of the problem to be solved.” (Robert J. Sternberg, 1999, s. 41)

I det klassiska perspektivets begynnelse kopplade man slumpmässighet till likformig sannolikhetsfördelning, vilket hade sin förklaring i att man utgick från spelsituationer i sina förklaringsmodeller (Batanero, 1996). Egenskapen, att alla utfall skall vara lika troliga i en slumpsituation, är dock irrelevant för att definiera en situation som slumpmässig. Vi ser exempelvis ett kast med ett häftstift som rent slumpmässigt även om vi ganska enkelt kan övertyga oss om att utfallen – nålen upp eller nålen ner – inte har samma sannolikhet. Avgörande för oss om en situation bär på element av slump blir istället vår oförmåga att förutsäga dess utfall (Truran, 2001).

Efter att ha identifierat en situation som slumpmässig kan konstruktionen av en sannolikhetsmodell sägas börja med att beskriva mängden möjliga utfall (Borovcnik *et al*., 1991). Varje möjligt resultat av ett slumpförsök kallas för ett *utfall* (Blom, 1970, 1984). Med avseende på en sannolikhetsmodell så konstrueras varje tänkbart utfall endast i sådan detalj som krävs för modellen. Ta till exempel ett kast med ett vanligt och välbalanserat mynt. Här begränsas utfallen med fördel till att endast gälla resultaten krona eller klave. Ett resultat där myntet ställer sig på högkant eller på något annat sätt skiljer sig från de båda antagna utesluts således från modellen. Denna typ av kunskap, att lära sig begränsa och idealisera i situationen, blir enligt Fischbein (1991) avgörande för den matematiska verksamhetens produktivitet.

Mängden av alla tänkbara utfall formar sedan utfallsrummet $\Omega$. Vid kast med en vanlig tärning så inför vi sex utfall som, med avseende på antalet ögon, kan betecknas med 1, 2, 3, 4, 5, 6. Utfallsrummet $\Omega$ för tärningskast består alltså av dessa utfall och kan därför skrivas på formen

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Man definierar sedan begreppet *händelse* (eng. event) som en samling av utfall, dvs. som en delmängd av utfallsrummet. En delmängd som består av endast ett utfall kallas för elementarhändelse (eng. elementary event). Exempel på andra händelser, med avseende på tärningen, är $A$ = ”udda antal ögon” och $B$ = ”antal ögon minst fyra”. Med användning av beteckningar för utfallen så kan vi skriva dessa händelser som:

$$A = \{1, 3, 5\};\ B = \{4, 5, 6\}$$

Som ett nästa steg kan man sedan gå vidare med att utveckla resonemang om sannolikheter för olika händelser inom utfallsrummet.

Men, oavsett vilken sannolikhetsdefinition man använder i sin modell, för att tillskriva sannolikheten för en händelse i $\Omega$, så måste hänsyn tas till vissa allmänna strukturer inom området. I studien kommer jag endast att intressera mig för ändliga sannolikhetsfördelningar och dessa strukturer beskrivs då av Kolmogorovs axiomsystem som (Blom, s. 23, 1984):

Axiom 1. För varje händelse $A$ gäller att $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Axiom 2. För hela utfallsrummet $\Omega$ så gäller att $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3. (Additionsformeln) Om $A$ och $B$ är oförenliga händelser, gäller att: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Det första axiomet innebär att sannolikheten för en händelse tillordnas ett tal mellan 0 och 1. Beträffande axiom 2 så innebär detta att om händelsen $A$ väljs som hela utfallsrummet $\Omega$ så får vi händelsen att försöket skall utfalla på något av de möjliga sätten, vilket som helst, vilket är detsamma som en säker händelse, som har sannolikheten 1. Som illustration till Axiom 3 kan följande tärningssituation nämnas: Händelsen att få en 1:a, $A = \{1\}$, eller en 6:a, $B = \{6\}$, betecknas $A \cup B = \{1,6\}$. De båda elementarhändelserna är oförenliga, det går ju inte att få både en 1:a och en 6:a i samma kast. Andelen kast som resulterar i antingen en 1:a eller 6:a är därmed lika med andelen kast med 1:a plus andelen kast med 6:a (Jonson & Norell, 1999).

Som tidigare poängterats så säger inte den strukturella ansatsen något om det sätt på vilket sannolikheten för en händelse skall väljas. Med anledning av att det är den klassiska sannolikhetsdefinitionen som fokuseras i skolundervisningen kommer jag i huvudsak anta detta perspektiv i studien. Enligt denna så är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsen gynnsamma fall och antalet möjliga fall (Blom, 1984). Vad som bör nämnas i sammanhanget är att denna definition av sannolikhet endast kan tillämpas om sannolikhetsfördelningen är likformig, dvs. om alla utfall i $\Omega$ har en och samma sannolikhet. För att kunna hantera likformiga fördelningar på ett tillfredställande sätt blir det ofta väsentligt att kunna hantera kombinatoriska operationer. Piaget och Inhelder understryker detta ytterligare då de argumenterar för förmågan att kunna tänka i kombinatoriska termer som grund för individers utveckling av ett chansbegrepp:

> …the formation of the ideas of chance and probability depending in very strict manner on the evolution of combinatoric themselves. It is from the ability to conceive mixture and interferences according to an operative schema of permutations and combinations that the child comes to what is properly called the notion of random mixture, that is, to the notion of chance. (Piaget & Inhelder, 1975, s. 161)

Men för att kunna kartlägga utfallsrummet på ett önskvärt sätt, dvs. finna alla för händelsen möjliga utfall, så måste ofta hänsyn tas till de ingående utfallens ordning. Problematiken kring detta exemplifierades i inledning till avsnittet om subjektivitet och bedömningsmetoder. Där beskrevs slumpförsöket att dra sex stycken kulor ur en likformig fördelning. Ett annat intressant fall i linje med detta går att finna i slumpförsöket att kasta två mynt. Detta slumpförsök kan resultera i något av utfallen två krona, en krona och en klave samt två klave. Dessa tre utfall har emellertid inte en och samma sannolikhet. Däremot anses de ordnande paren (krona, krona), (krona, klave), (klave, krona), (klave, klave) vara lika sannolika. För händelsen att få en krona och en klave har vi således två möjligheter av fyra. Detta renderar en sannolikhet enligt den klassiska definitionen för händelsen $A$ = ”en krona och en klave” som:

$$P(A) = 2/4 = 1/2$$

Om vi inför en så kallad *slumpvariabel* $X$ som en beteckning för antalet kronor på två myntkast så kan vi alternativt skriva:

$$P(X = 1) = 1/2$$

Detta gör vi främst för att vi ibland kommer att behöva resonera kring flera utfallsrum, och det utfallsrum som hör ihop med $X$ kan vi då beteckna med $\Omega_X$. I fallet med antal kronor är

$$\Omega_X = \{0, 1, 2\}.$$

Jag kommer i studien fokusera slumpsituationer där detta tänkande utifrån proportionalitet kan appliceras, för att dra slutsatser om en händelses sannolikhet.

I syfte att fånga och kartlägga den mångfald som florerar i resonemang över sannolikhetssituationer har Jones *et al.* (1999), i en longitudinell studie över tre år med elementary och middle school elever, identifierat följande sex nyckelbegrepp;

1. Utfallsrum
2. Experimentell sannolikhet av en händelse
3. Teoretisk sannolikhet av en händelse
4. Jämförelse av sannolikheter
5. Betingad sannolikhet
6. Oberoende händelser

Varje begrepp har man sedan i tur och ordning delat in i fyra nivåer och på så sätt format ett ramverk med ändamålet att underlätta för lärare i den pedagogiska verksamheten. Jag kommer inte här att lägga någon större vikt vid dessa nivåer utan väljer istället att använda detta ramverk till att validera de val av komponenter av sannolikhet vi ämnar undersöka i vår studie. Detta då flera av de begrepp som Jones *et al.* (1999) tar upp väl överensstämmer med vad vi tidigare lyft fram som väsentliga komponenter i en matematisk modell över en sannolikhetssituation.

Sammanfattar vi diskussionen under avsnittet i sin helhet finner vi alltså utfallsrummet och förmågan att kunna identifiera detta som ytterst väsentligt för ett önskvärt agerande i en sannolikhetssituation. Härur har man sedan möjligheten att utveckla resonemang kring sannolikhet för händelser i termer av proportionalitet. Vi ser också att det i slumpförsök som är uppdelade i flera steg (delar), oberoende av varandra, både krävs en kombinatorisk förmåga och en förmåga att kunna ta hänsyn till ordningen mellan stegen (delarna), för en tillfredsställande kartläggning av utfallsrum och sannolikheter.

Det är utifrån detta matematiska och matematikdidaktiska perspektiv – förhållandet utfallsrum och sannolikhet, tillsammans med processen att identifiera relevant utfallsrum – jag väljer att titta närmare på elevers agerande i slumpsituationer, innehållande kombinerade och oberoende slumpgeneratorer. Speciellt kommer studiens matematiska ansats att fokusera följande komponenter ur det modellperspektiv som diskuterats i avsnittet:

1. Slump och slumpmässighet – Hur elever hanterar en situations slumpfaktor.
2. Elevers uppfattning om skillnad mellan möjligt och omöjligt utfall.
3. Det sätt på vilket eleverna baserar sannolikheten för en händelse på. Modellerar de det kombinerade slumpförsöket som uppdelat i flera steg (delar), dvs. i vilken utsträckning tänker de i termer av antal gynnsamma fall och ordnade par för att utifrån detta värdera en händelses sannolikhet i termer av proportionalitet.

Uppdelningen är givetvis endast analytiskt motiverad då flera av punkterna kan sägas överlappa vad gäller innehåll. Skillnaden mellan punkt 2 och 3 kan dock sägas vara att punkt 2 är relaterad till det utfallsrum som visar sig explicit medan punkt 3 är kopplad till vilken process som ligger bakom slumpförsöket, kopplad till någon form av systematisk ansats. För slumpförsöket att kasta två mynt skulle detta innebära att punkt två står i relation till utfallsrummet $\Omega_2$ = { (två krona), (en krona och en klave), (två klave)} medan punkt tre står i relation till $\Omega_3$ = {(krona, krona), (krona, klave), (klave, krona), (klave, klave)}.

### 2.2.2 Matematikdidaktik - sannolikhetstänkande

Under detta avsnitt vill jag vidareutveckla och precisera ovanstående resonemang kring slumpförsök som är uppdelade i flera steg (delar), oberoende av varandra, genom att titta närmare på vad som tidigare varit föremål för didaktiska undersökningar på området.

> The definitive texts on the development of probability cognition are the classics by Piaget and Inhelder (1951, translated 1975), and Fischbein (1975). (Hawkins and Kapadia, 1984, s. 352)

Människors agerande i olika situationer av osäkerhet har som tidigare nämnts varit föremål för flera studier under senare tid, om än med olika inriktningar på sina respektive syften och frågeställningar. Men studier kring barns *utveckling* i sannolikhetstänkande kan alltså, enligt Hawkins och Kapadia (*ibid.*), sägas ha initierats av de båda verken, refererade till i citatet ovan. Även om flera av Piagets slutsatser inom sannolikhetsområdet går att återfinna också som grundvalar i studier av Fischbein – med betoning på begreppsutvecklingens komplexitet, som sannolikhetstänkandets koppling till agerande och anpassning till miljön – så finns också flera fundamentala skillnader. En mer detaljerad beskrivning av och jämförelser mellan de båda verkens bidrag till området går att läsa i t ex. Hawkins och Kapadia (1984), Ritson (1998) och Greer (2001). Här intresserar jag mig endast för de delar av de båda teorierna som ryms inom ramen för den aktuella studiens intressen.

Den mest uppenbara skillnaden mellan de båda verken ligger i det grundantagande Fischbein gör då han ser intuitionen som sannolikhetstänkandets utgångspunkt. Piaget och Inhelder (1975), å andra sidan, har utifrån sina teorier kommit till konklusionen att en begreppsutveckling på området inte går att identifiera innan det konkreta operationella stadiet infunnit sig. För att förstå att en händelse innehåller en slumpfaktor måste barnet först lära sig förstå deterministiska fenomen. Utifrån denna deterministiska uppfattning av omgivningen kan sedan barnet upptäcka, vid något tillfälle, att en situation inte går att förklara i termer av operationellt tänkande. Denna konflikt, som kan sägas vara det sätt på vilket barnet identifiera slump, får inte sin lösning, menar Piaget och Inhelder (*ibid.*), förrän det är förmöget att konstruera ett formellt system baserat på proportionalitet. Nyckeln till ett önskvärt agerande i sannolikhetssituationer vilar således på barnens förmåga att kunna tänka i operativa termer, utifrån proportionalitet. Som vi såg i ett tidigare citat, från Piaget och Inhelder, så blir individers kombinatoriska förmåga avgörande i en sådan process. Detta sätt som förklaringsmodell har dock väckt en del kritik då man ser en paradox i det. Pratt (1998) uttrycker ”How is it that children come to interpret stochastic phenomena at a time when determinism is their main, if not their only, way of looking at the world,…If accommodation happens, how does it happen?” (s. 28)

Kritik går också att finna mot de kliniska undersökningsmetoder de bygger sina studier på, då dessa tenderar att ignorera yttre influenser (Ritson 1998). Men oavsett kritiken finner vi flera resultat och implikationer relevanta för den aktuella studien ur Piaget och Inhelders (1975) arbete. Tonvikt kommer dock att läggas på den koppling de gör mellan tänkande i sannolikhet och proportionalitet utifrån förmågan att identifiera kombinationer.

Fischbein (1975) som jag anser också antar en konstruktivistisk syn på inlärningsfenomen, med tankestrukturer uppbyggda av scheman, menar dock att det går att stimulera mot ett mer utvecklat agerande redan innan det operativa stadiet (Fischbein, 1975; Greer, 2001). Sina antaganden lutar han mot sin uppdelning i primära intuitioner av sannolikhet och begreppet sannolikhet (Fischbein, 1975) och argumenterar för att en primär, pre-operationell intuition, förvärvad i vardagen utan formell instruktion, finns närvarande redan från tidiga år. Detta, tillsammans med föreställningen att begrepp och intuitioner inom området kan sägas vara socialt medierade, modifierade och utvecklade – i stark kontrast till Piaget (Greer, 2001) – ligger sedan till grund för den uppdelning han väljer att göra av intuitioner i primära respektive sekundära intuitioner (Fischbein, 1975, s. 9):

1. *Primära intuitioner* – är formade innan, och oberoende av, systematisk instruktion. Spatiala intuitioner hör hit, likväl som de fundamentala operationella intuitioner som reglerar logiskt tänkande.
2. *Sekundära intuitioner* – är kognitiva förvärv med intuitionens alla egenskaper, men är formade efter en systematisk ansats av instruktion.

Precis som resultat från det psykologiska forskningsperspektivet visat på så vilar stor del av våra bedömningar, i situationer av osäkerhet, på intuitivt agerande. Även om detta kan föra med sig vad många skulle kalla missuppfattningar i olika former finner Fischbein (*ibid.*) det dock väsentligt med intuitionens funktionella karaktär i det faktum att den upprättar och bibehåller en intim kontakt med agerandet genom direkta utryck, starkt förknippade till egna upplevelser. Men han begränsar inte intuitionen till att enbart betraktas som övergångssteg mellan inre och yttre agerande. Han lyfter också dess roll som autonom kognitionsprocess med unika och viktiga egenskaper i arbetet att analysera och syntetisera erfarenheter:

> Intuitive estimations are not reducible to random guesses. They are structured by a number of content-bounded pattern, the roots of which are related to basic schemata (Fischbein & Grossman, 1997, s. 40).
> Schema becomes an intuition by getting compressed, by reducing itself to a minimal structure. (Fischbein, 1997, s. 42)

Men för att utveckla sekundära intuitioner och få dem att stabilisera sig i scheman och innehålla en känsla av övertygelse, krävs omfattande övning inom situationer som bär på element av sammanhang, stabilitet och effektivitet (Fischbein, 1975).

Ser vi till det tidigare experimentet med kulorna så bottnar den primära intuitionen, *gamler's fallacy*, i det schema som kommer till uttryck i komprimerad form via metoden *representativeness*. För att kunna utveckla detta till en sekundär intuition och ge en formell lösning av problemet krävs därför att det underliggande schemat här såväl utvidgas att innehålla som att stimuleras till att prioritera element, filtrerade ur ett kombinatoriskt resonemang. I termer av Howard (1987) kan man se primära intuitioner grunda sig i scheman uppbyggda av specifika kännetecken till skillnad från de intuitioner som utvecklas att även ta i anspråk egenskaper av definierad och strukturell karaktär. För många barn kan det exempelvis vara svårt att intuitivt ta till sig det faktum att även en två-åring kan vara faster, då de har sin (paradigmatiska) bild klar för sig hur en faster bör se ut. Detta menar Howard (*ibid*) att vi får förståelse för då vi utvecklar våra scheman till att även innehålla egenskaper som är definierande för ett begrepp oberoende av situation. Fischbein vill dock göra oss uppmärksamma på två väsentliga aspekter vad gäller relationen mellan primär och sekundär intuition. För det första; "It would be very difficult to draw a clear distinction between the two types of intuitions" (Fischbein, 1975 s. 140) och för det andra; "It is important to emphasize that new, correct intuitions do not simply replace primitive, incorrect ones. Primary intuitions are usually so resistant that they may coexist with new, superior, scientifically accepted ones." (Fischbein, 1987, s. 213)

I linje med fickknivsmetaforen, introducerad i inledningen, uppmärksammar det andra citatet det väsentliga i att lära sig bli medveten om ämnesspecifika kunskapers relation till det sätt på vilket man uppfattar en uppgiftssituation. I relation till en lärsituation kan man därför argumentera för att förmågan att urskilja väsentliga aspekter i situationen i fråga blir avgörande för den respons elever ger på ett specifikt ämnesinnehåll. Beträffande studiens teoretiska överväganden finner jag därför anledning att återkomma till detta resonemang längre fram.

### 2.2.3 Intuitiva modeller

Då flera resultat, inte minst från det psykologiska forskningsområdet, visar på hur intuitivt agerande påverkar produktiviteten i ett sannolikhetsresonemang vill jag undersöka detta ytterligare. Jag vill särskilt beskriva hur vi kan se detta agerande som baserat på intuitiva modeller.

> Considering two systems, A and B, B is defined as a model of A if it is possible to translate properties of A in terms of B so as to produce consistent descriptions of A in terms of B, or to solve problems - originally formulated in terms of A – by resorting to a translation in terms of B (Fischbein, 2001, s. 312)

En grov karaktärisering av en intuitiv modell kan sägas vara att den på något sätt är kopplad till våra sinnen. Vidare menar Fischbein (1987) att en intuitiv modell uppfattas, tolkas och manipuleras med som vilket annat konkret objekt som helst.

Precis som en intuition i allmänhet så kan en intuitiv modell vara antingen explicit eller implicit för användaren (*ibid.*) En modell är explicit om användaren är medveten om att han/hon använder den, i motsatts till en implicit modell där modellen verkar på ett närmast automatiskt och underförstått sätt i användarens resonemang.

Utifrån en modells karaktär i allmänhet kan man sedan finna anledning till att kategorisera intuitiva modeller på olika sätt. Som utgångspunkt för detta väljer jag den indelning och beskrivning som Fischbein (*ibid.*) gör:

*Analog, paradigmatisk och diagrammatisk modell*

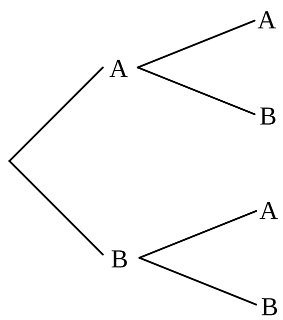
Två system sägs vara *analoga* om man finner skäl, utifrån vissa likheter, att anta att de båda objekten är lika i ytterligare avseenden. Framförallt är det likheter i struktur som formar en analogi. Färgen blå mellan en blå bil och ett blåbär formar exempelvis ingen analogi då där saknas möjligheten att dra ytterligare, rimliga, slutsatser dem emellan. I en analogi tillhör originalet och modellen två skilda konceptuella system. Som exempel kan nämnas det analoga i att beskriva elektrisk ström som en flödande vätska genom en smal ledning. Dessa båda är fenomen som tillhör två konceptuellt skilda domäner. I fallet med en *paradigmatisk* modell så tillhör originalet och modellen samma konceptuella system. Originalet tillhör en mängd ur vilken ett representativt exempel, en prototyp, lyfts fram och bildar modellen. Vatten är en vanlig paradigmatisk modell över mängden vätskor. En tredje kategori modeller Fischbein beskriver är de *diagrammatiska*. Dessa är i huvudsak grafiska representationer av fenomen och relationer dem emellan. Venndiagram, träddiagram och histogram är tre exempel på diagram som används för att förklara stokastiska fenomen och relationer. Medan analogier vanligtvis representeras av en avbildning mellan två relativt oberoende system så är diagrammet en konstruktion, tänkt att modellera originalet. En sådan konstruktion bär på flera intuitivt viktiga egenskaper. Den ger en översiktlig, global bild av en struktur, vilket bidrar till en global och många gånger omedelbar förståelse för ett fenomen, samtidigt som den utgör en länk mellan en intuitiv föreställning och en symbolisk representation av ett speciellt fenomen. Om vi exempelvis tittar på den symboliska representationen $B \subset A$ så kan vi dra slutsatserna att unionen av mängderna är lika med A medan snittet är lika med B. Detta påstående är inte helt lätt att skapa sig en intuitiv föreställning av utan att använda sig av ett venndiagram.

Samtidigt måste dock poängteras att diagram i allmänhet innehåller konventioner, vad gäller symbolhantering, som inte är helt självklara. Sättet att hantera de symboler som ingår i en diagrammatisk modell bestäms av de regler som styr originalet.

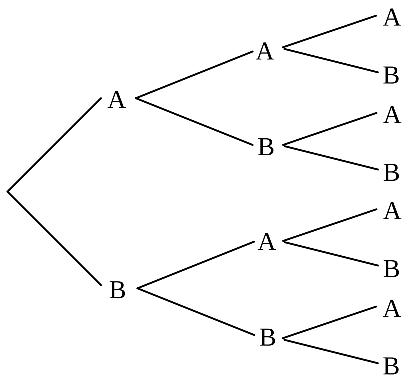
Intuitiva modellers produktivitet

En viktig roll för intuitiva modeller är således att verka medlande mellan å ena sidan det intellektuellt obegripliga och å andra sidan det som är intellektuellt accepterat och manipulerbart. Viktigt för att denna process skall bli produktiv är, enligt Fischbein (1975), att de modeller vi använder bär på generativa egenskaper. Framförallt är det potentialen i en modell att kunna göra iterativa och konstruktiva generaliseringar som är av störst intresse. Med iterativa generaliseringar menas att samma modell går att använda till liknande problem, där bara antalet element (steg) skiljer. Förmågan till konstruktiva generaliseringar innebär att man med stöd i den tidigare modellen på ett spontant sätt finner liknande konstruktioner till relaterade problem. Med utgångspunkt i generativa modeller argumenterar sedan Fischbein (*ibid.*) för att "The construction of secondary intuitions by pedagogical methods may ultimately be reduced to a matter of creating and using adequate generative models." (s. 116)

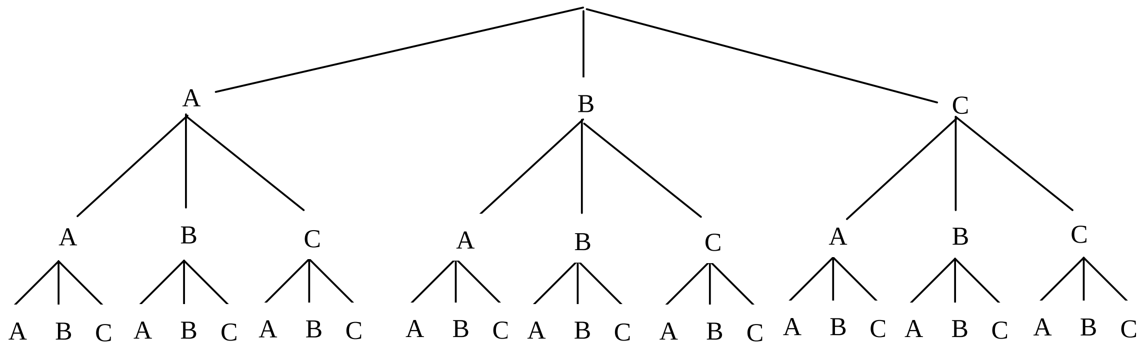
Som exempel på en sådan konstruktion lyfter Fischbein fram träddiagrammet, då detta på ett omedelbart och överskådligt sätt återger ett problems kombinatoriska natur samtidigt som det möjliggör såväl iterativa som konstruktiva generaliseringar. Händelsen att dra två kulor med återläggning ur en urna som innehåller två sorters kulor, A och B, kan vi illustrera med ett träddiagram som:




Vill vi nu ändra modellen till att istället beskriva händelsen att dra tre kulor ur samma urna, med återläggning, så finner vi att vi kan lösa detta genom att lägga till en tvågrenad enhet till vart och ett av de fyra utfallen i figuren. Detta beskriver modellens iterativa egenskaper och skulle leda till följande illustration:



Skulle vi istället ändra förutsättningarna i lådan till att innehålla en homogen blandning av tre olika sorter kulor, A, B och C så måste vi, för att kunna illustrera händelsen att dra tre kulor med återläggning, ändra i strukturen på ett annat sätt än vid den iterativa förändringen. Att man utifrån den ursprungliga modellen på ett spontant sätt kan utveckla en illustration över denna nya händelse visar på modellens konstruktiva egenskaper. Händelsen illustreras med modellen som:




2.2.4 Matematikdidaktiska forskningsresultat

Tillsammans med Maria Sciolis Marino och Maria Sainati Nello följer Fischbein upp sina tidigare resultat, beträffande flerstegsförsök, i en kvantitativ studie med 618 elever. Deras studieobjekt är riktat mot sådana faktorer, framförallt intuitivt härledda, som kan ses påverka elevers bedömningar över sådana händelser (Fischbein *et al.*, 1991).

För det första upplever eleverna att de har bättre kontroll över ett slumpförsök, som att rulla tre tärningar, om tärningarna rullas var för sig istället för samtidigt. Detta leder till att eleverna bedömer sannolikheterna för händelserna att, låt säga, få tre femmor som olika beroende på vilken av metoderna de använder. För det andra verkar eleverna äga en intuitiv idé av relationen mellan sannolikhet och motsvarande utfallsrum. Men då de har svårigheter att ta fram den matematiska strukturen ur en praktisk situation, beträffande utfallsrummet, blir denna relation ofta osynlig. För det tredje, avslutningsvis, så visar det sig att elevers bedömningar av skillnad i sannolikhet mellan olika tärningssummor förbättras om uppgiften presenteras i en generaliserad form. Fler korrekta bedömningar gavs då frågan fokuserade skillnad i sannolikhet mellan att få lika respektive olika utfall, vid kast med två tärningar, än om den fokuserade skillnad i sannolikhet mellan att få en 5:a och en 6:a eller två 6:or. I studien har man undersökt detta fenomen för både tärningskast och slantsingling och finner att elevers resonemang blir starkare i tärningssituationen än i slantsinglingen, även om responsen förbättras i båda fallen. Då eleverna intuitivt verkar koppla sannolikhetsbedömningar till motsvarande utfallsrum så motiverar Fischbein och Marino detta resultat med att ju ”rikare” ett utfallsrum är desto lättare har eleverna att bedöma utfallsrummets storlek och struktur och därmed finna grund för att kunna dra riktiga slutsatser.

Med avseende på hur uppfattningen av utfallsrummet påverkar sannolikhetsbedömningar så har Keren (1984) funnit skäl för omtolkning av Kahneman och Tverskys tidigare slutsatser vad gäller heuristiken representativeness. Dessa omtolkningar bygger på samma princip som jag kort beskrev i det inledande exemplet med kulorna under avsnittet *Intuitiva bedömningsmetoder och subjektivitet*. Uppgiften Kahneman och Tversky (1972) ställde till sina deltagare handlade om hur de uppfattar att en slumpvis fördelning av 20 stycken karameller bland 5 barn kan ta sig uttryck. Frågan man ställde löd: Vilka av följande två fördelningar är mest trolig (eng. likely)?:

| | I | II |
|---|---|---|
| Alan | 4 | 4 |
| Ben | 4 | 4 |
| Carl | 5 | 4 |
| Dan | 4 | 4 |
| Ed | 3 | 4 |

En betydande del (69%) av individerna trodde att det var fördelning I som var mest trolig. Matematiskt sett så är sannolikheten för fördelningen I lika med 0.00257, medan sannolikheten för fördelning II är lika med 0.00321. Den typ av respons som de flesta elever gav, och som kan sägas vara i motsats till vad Lecoutre identifierat, tolkar Kahneman och Tversky (*ibid.*) som ett resultat av bedömningsmetoden *representativeness.* Fenomenet är detsamma som med den tidigare diskuterade lottoraden. Då man helt enkelt har sett fler oregelbundna lottorader vinna, och samlat dessa under egenskapen oregelbundenhet, så ger man större tilltro till att sprida ut numren på en lottorad istället för att välja sju nummer i följd. Baserat på denna intuition drar agenten slutsatsen att följder utan oregelbundenhet är mindre troliga. Men Keren (1984) anser inte detta vara det enda sättet att tolka individernas respons på. De argument han utgår ifrån kan jämföras med diskussionen jag förde över händelsen att dra sex stycken kulor, i vilken skillnad i sannolikhet mellan specifika följders sannolikhet och sannolikheten för grupper av följder illustrerades. Deltagarna, menar Keren, kanske inte alls kopplar karamellernas fördelning till barnen utan ser den som skild från dem, dvs. de uppfattar inte fördelning I som en specifik följd utan istället som en representation av en grupp av följder; tre barn får fyra karameller, ett barn får tre och ett annat barn får fem karameller. Då det är 20 möjliga fördelningar som resulterar i en 3:a, en 5:a och tre 4:or så är sannolikheten för den grupp av fördelningar som representeras av I lika med 20 x (0.00257) = 0.0514, vilket är betydligt högre än sannolikheten för en ensam fördelning med fem stycken fyror.

Keren går sedan vidare med ett eget liknande experiment och finner där ytterligare stöd för att ifrågasätta Kahneman och Tverskys slutsatser. Han finner, i likhet med Fischbein *et al*. (1991), en nära relation mellan att ge korrekt respons på en uppgift och det utfallsrum bedömningarna grundar sig på. Denna relation vore mer i linje med vad Kahneman och Tversky skulle kalla availability (Gilovich *et al.*, 2002), dvs. elevernas respons beror av vilken information som är, eller kan göras, lättast tillgänglig för barnen.

Även om Piagets och Fischbeins arbeten, tillsammans med det heuristiska perspektivet, båda har bidragit med flera viktiga resultat så går det att argumentera för att vissa aspekter på området behöver studeras ytterligare, i syfte att förklara och förstå hur människor agerar under osäkerhet.

I artikeln *Making Sense of the Total of Two Dice* hävdar Pratt (2000) exempelvis att Fischbeins teorier inte på ett tillfredsställande sätt beskriver hur lärandemiljöer bör vara utformade, om sekundära intuitioner skall kunna utvecklas. I avsikt att låta elever ge mening åt fenomen genererade i slumpprocesser, inom en datorstödd miljö, introducerar han en ansats i vilken han finner anledning att dela upp aspekter av interaktion i inre och yttre resurser. De yttre resurserna inkluderar komponenter ur omgivningen – såsom hjälpmedel, uppgiften, läraren, och så vidare – i motsats till de inre, vilka är identifierade som individuella beslutsmodeller:

> The development of knowledge is taken to depend upon the interaction of external resources with the child's dynamic knowledge, incorporating all forms of intuitional and formal thinking, to which I shall refer generally as internal resources. (Pratt, 2000, s. 3)

Han delar sedan in de inre resurserna ytterligare, i lokala respektive globala resurser. Dessa båda resurser kan sägas vara varandras motpoler. De lokala resurserna relaterar han till de resurser som kan sägas bli konstruerade av de specifika kännetecken som framträder i korta följder av slumpprocesser. De är lokala i det avseende att de fokuserar *trial-by-trial* variationer. De globala resurserna aktiveras och konstrueras på motsvarande sätt av fenomen som är karaktäristiska för långa slumpgenererade följder (long-term behaviour). Sådana resurser fokuserar därför en samlad och övergripande bild av slumpprocesser.

I motsats till missuppfattningsperspektivet så intresserar sig Pratt för vad studenterna vet och verkligen gör då de möter situationer som innehåller element av osäkerhet. För detta är han influerad av diSessa's teorier beträffande p-prims (eng. phenomenological primitives). Dessa p-prims är talrika och definieras som små kunskapsdelar vilka uppfattas av individen som självklara, självberättigande och svagt kopplade (diSessa, 1993). Flera p-prims bär på egenskaper liknande de för paradigmatiska modeller varför vi också finner paradigmatiska drag även för Pratts resurser. De lokala resurser som Pratt (2000) identifierar är:

1. Unpredictability (oförutsägbarhet) – En slumpgenerator, som exempelvis en tärning, uppfattas som slumpmässig om nästa utfall inte är förutsägbart.
2. Irregularity (oregelbundenhet) – En följd är slumpmässigt genererad om inte något mönster är tydligt i följden. Oförutsägbarhet och oregelbundenhet står i nära relation med varandra; den förstnämnda ser till framtiden medan den andra beror av tidigare, redan insamlad, data.
3. Unsteerability (ostyrbarhet) – Ett fenomen uppfattas som slumpmässigt om iakttagaren är oförmögen att utöva fysisk kontroll över fenomenets utfall.
4. Fairness – Med avseende på denna lokala resurs så grundar sig bedömningar, beträffande slumpmässighet, på symmetriska egenskaper.

Pratt argumenterar för att ett avgörande steg är att utveckla förståelse för det han kallar long-term behaviour, och speciellt för de egenskaper som reglerar detta. De globala resurser som står i relation till den typen av förståelse har han identifierat i termer av:

1. Probability (sannolikhet) – Proportioner av varje möjligt utfall är förutsägbara.
2. Large numbers (stora tal) – Proportioner av tidigare resultat för varje möjligt utfall kommer att stabiliseras då ett ökat antal utfall betraktas.
3. Distribution (fördelning) – Iakttagaren är förmögen att kontrollera dessa proportioner genom att manipulera utfallsrummet.

Då Pratt intresserat sig för interaktionen mellan inre och yttre resurser så kommer den aktuella studien att vara i enighet med vissa aspekter av Pratts ansats. Men till skillnad från Pratt, vars studie är placerad i en datormiljö, så kommer jag här att intressera mig för situationer som innehåller konkreta objekt. Vidare så kan Pratts fokus sägas vara riktat mot att identifiera tankemodeller, p-prims, i relation till teorier med avseende på situerat lärande. Även om intuition i allmänhet och tankemodeller i synnerhet kommer att spela en avgörande roll även för min studie, så kommer interaktionen mellan inre och yttre komponenter att ses utifrån ett konstruktivistiskt perspektiv. Detta innebär att jag kommer att betrakta interaktionen utifrån elevers personliga konstruktioner och med fokus på hur sådana konstruktioner kan sägas ha en framträdande roll för elevers förståelse och utveckling av nya begrepp beträffande sannolikhet.

Summerar vi den tidigare diskussionen ser vi att sättet på vilket en sannolikhetsuppgift är inbäddad i en situation spelar en avgörande roll, för den respons eleverna lämnar på en uppgift. Detta faktum har under senare år varit utgångspunkt för att omvärdera flera resultat från det tidigare så dominerande missuppfattningsperspektivet. Vad man dock kan sakna är en mer nyanserad, systematiserad och strukturerad bild av hur denna typ av fenomen kan ses i ljuset av kognitiv utveckling. Hur ska vi definiera kunskap och kognition då elever visar kompetens i ett visst matematiskt sammanhang men inte i ett annat? Och hur ska vi utifrån detta sedan beskriva begreppsförändring och kognitiv utveckling? Detta är frågor som jag i nästa avsnitt vill söka klarhet i.

# 3 Teoribakgrund

Fokus för studien är elevers begreppsförståelse och begreppsförändring i relation till ett specifikt ämnesinnehåll. Diskussioner kring detta har under senare år varit föremål för diskussion, då ändrade synsätt på området förts fram.

Den konstruktivistiska teoribildningen fokuserar individers kunskapskonstruktion av ett lärande objekt. Denna konstruktion beskrivs som en ömsesidig process i vilken den lärande assimilerar ny information till redan befintliga begreppsstrukturer samtidigt som hon ackommodera dessa strukturer till omgivningen. I och med detta betraktas individers förkunskaper som viktiga komponenter vid inlärning, som byggstenar för nya konstruktioner. På senare tid har dock en del kritik lyfts fram kring detta sätt att se på lärande. Kritiken har dels rört begreppsförändring i allmänhet och dels hur lärande kan ses som en kontinuerlig process om de förkunskaper den lärande håller är missuppfattningar. Dessutom så har kritik riktats, i huvudsak från det socio-kulturella perspektivet, mot konstruktivismens låga prioritering av den situerade interaktionen mellan individ och miljö, som villkor och betydelse för lärande (Säljö, 2000). I syfte att forma den aktuella studiens teorigrund kommer jag att mer ingående diskutera dessa aspekter på lärande och begreppsförändring, och argumentera för att man trots kritiken kan anta ett konstruktivistiskt förhållningssätt till lärande.

## 3.1 Alternativa referensramar och missuppfattningar

Som tidigare beskrivits så syns olika intuitioner spela en avgörande roll för den respons individer ger i olika situationer av osäkerhet. Ett intuitivt agerande enligt denna beskrivning kan därför sägas ha starka likheter med vad som allmänt kommit att kallas individers *alternativa referensramar* (eng. alternative frameworks) (Driver, 1981). Dessa alternativa referensramar, som likt intuitioner är förankrade och formade i vardagserfarenheter, står i liknande relation till undervisningsbegrepp som primära intuitioner står till de sekundära. Beträffande lärande utifrån ett sådant erfarenhetsbaserat tänkande har detta inom den konstruktivistiska traditionen vanligtvis betraktats som en process i vilken naiva, alternativa föreställningar överges till förmån för mer vetenskapliga kunskaper. Modellen får därmed en hierarkisk prägel då de nya referensramarna ges en högre vetenskaplig status. Men då ett konstruktivistiskt förhållningssätt på lärande också utgår från grundprinciperna kontinuitet och funktionalitet, för kunskap och kunskapsprogression, blir denna modell över lärande svår att hantera. Vad gäller kontinuitetsprincipen så innebär den att utveckling mot mer avancerad kunskap är psykologiskt och epistemologiskt kontinuerlig. Funktionalitetsprincipen understryker det nödvändiga i att ny kunskap skall uppfattas som funktionell av den lärande för att förvärvas (Smith *et al.*, 1993). Vad som blir svårt att förklara med en modell över lärande där utveckling beskrivs som att elever överger naiva uppfattningar till förmån för vetenskapliga är framförallt kontinuitetsaspekten. För det första så infinner sig frågan; Hur kan ny formell kunskap konstrueras utifrån ”naiva” föreställningar, om de båda kunskapsformerna är inkonsistenta med varandra? Denna problematik understryks av den digra kartläggning av olika s.k. missuppfattningar som gjorts inom flera matematiska och fysiska områden (*ibid.*). Beträffande sannolikhetsområdet ligger, som tidigare nämnts, Kahneman och Tverskys arbeten till grund för flera av missuppfattningsperspektivets resultat. För det andra så har det visat sig att nyvunna kunskaper inte alltid visar sig vara stabila över olika situationer. Även om studenter visat sig bemästra Newtons mekanik vid ett inlärningstillfälle så är det inte säkert att de finner förståelse och applicering för den kunskapen i nya, och i grunden, liknande situationer (Johansson, 1981). Detta är grunderna till det transferproblem som det konstruktivistiska perspektivet brottas med och som förstärks av en lärandemodell där lärande ses som en process i vilken naiva, alternativa, föreställningar överges till förmån för mer vetenskapliga kunskaper.

Men, i överensstämmelse med Fischbein’s argument att en primär intuition inte överges, ges i Smith *et al.* (1993) en annan, mer positiv bild av vad en missuppfattning är eller hur den kan omtolkas till att förstås som en fruktbar komponent i en produktiv lärandeprocess. I ett försök att övertyga läsaren om kontinuitet i lärandeprocessen mellan novis och expert visar Smith med kollegor på flera exempel från matematik- och fysikområdet som styrker deras tes. Framförallt är det strategival och sätt att resonera som varit föremål för diskussion. Författarna menar att den tidigare så vedertagna uppfattningen att en novis tänker konkret och en expert abstrakt inte alls stämmer överens med deras iakttagelser. Istället vill de göra gällande att novisen visst tänker i abstrakta termer, såsom relationer och idealiseringar, och omvänt att experter också lutar sig mot fysikaliska, konkreta, förklaringsmodeller i vissa resonemang.

För att komma till rätta med den problematik och de motsättningar vi finner mellan ett konstruktivistiskt perspektiv och den forskning som bedrivits om individers alternativa referensramar och missuppfattningar blir vi därför tvungna att titta på begreppsförändring i ett vidare perspektiv. Som jag ser det kan detta ske i två riktningar. Det ena som en utvidgning av fokus till att också inbegripa situerade och kulturella betingelser vid lärsituationer. Det andra, att man istället för att enbart fokusera kunskap som isolerad till ämnesspecifika domäner, disciplinära kunskaper, väljer att titta på den ur ett mer övergripande perspektiv, utifrån större kunskapssystem (Smith *et al.*, 1993). Dessa båda riktningar kan sägas forma en tredje, som knyter samman de båda förra, nämligen interaktionen mellan å ena sidan individuella kunskapssystem och å andra sidan de resurser situationen i sig erbjuder den lärande. Jag kommer i de följande avsnitten att beskriva denna interaktion närmare och förklara hur den tar sig uttryck i processer av kontextualisering och differentiering och samband dem emellan.

## 3.2 Kontextualisering och differentiering

Hur interaktionen mellan individ och omgivning påverkar individers agerande har vi tidigare sett flera prov på. Caravita och Halldén (1994) beskriver hur detta även går att se i ljuset av ett konstruktivistiskt förhållningssätt. Som utgångspunkt för sina argument vänder de sig mot att se begreppsförändring utifrån den tidigare tesen att begreppsförändring innebär att en naiv uppfattning överges till förmån för en stabil mer vetenskaplig sådan, att man överger en kognitiv nivå till förmån för en annan. I stället finner de empiriska belägg för att denna process på ett bättre sätt beskrivs i termer av tankestrategier, såsom en utvidgad repertoar av strategier som en förfinad organisation av och emellan olika strategier. Ett begrepp utvecklas eller förändras genom att den lärande görs medveten om och lär sig att utnyttja nya strategier i sitt agerande. Lärande som organisering av tankestrukturer har vidare både en paradigmatisk och en icke-paradigmatisk aspekt. Den paradigmatiska liknas vid vad Piaget beskriver som assimilation, dvs. man försöker få ny information att passa in i redan befintliga tankemönster. Vad gäller den icke-paradigmatiska aspekten så menar Caravita och Halldén att lärande också går att se som att individer genom sina upptäckter utvecklar ny kunskap som verkar parallellt med tidigare s.k. vardagsuppfattningar. Denna nya kunskap, uppfattning av omvärlden, ersätter alltså inte en tidigare utan fyller andra syften. Utifrån denna beskrivning av kunskapsprogression finner Caravita och Halldén (*ibid.*) att avgörande för en lyckad lärprocess är att bli medveten om och att lära sig differentiera mellan olika kontexter; "Learning is then a process of decentering, in the Piagetian sense, rather than the acquisition of more embracing logical or conceptual systems replacing earlier less potent ones" (s. 106). Med avseende på intuitionens roll för lärande poängterar också Fischbein (1987) vikten av att lära sig urskilja det väsentliga i en lärsituation:

> …the problem with a paradigmatic model is not the capacity to grasp a general meaning (this happens automatically) but to identify those properties which are qualified as general in the realm of certain conventions (for instance, scientific conventions). (s. 152)

Avgörande för att differentiera, sovra och prioritera på ett produktivt sätt i en lärsituation blir det sätt på vilket den lärande uppfattar situationen, den kontext man ser sig vara en del i. Jag vill därför gå vidare med att redogöra för hur individers medvetenhet om och aktivering av olika lösningsstrategier kan beskrivas som ett problem att kontextualisera, som ett problem att forma ett relevant rum för lärande.

Inledningsvis vill jag först rikta uppmärksamhet mot vad jag menar med termen kontext. Här vill jag skilja detta från den innebörd som exempelvis ett socio-kulturellt perspektiv lägger i begreppet. Utifrån detta perspektiv relateras nämligen begreppet kontext till den situation i vilken en uppgift presenteras. Men flera studier har emellertid visat att även om intentionen är att förmedla ett specifikt innehåll i en lärsituation så är det inte säkert att den lärande uppfattar eller tolkar situationen på så sätt att detta innehåll blir explicit för honom eller henne (se t ex. Bergqvist, 1990). Vi har också tidigare (Fischbein *et al.*, 1991; Lecoutre, 1992) sett flera prov på hur samma matematiska struktur kan komma att uppfattas olika beroende på i vilket sammanhang den presenterats och hur detta sammanhang uppfattats av de undersökta eleverna. Det finns också resultat som visar hur intuitiva föreställningar om ett innehåll, t ex. resursen oregelbundenhet (Pratt, 2000), påverkar ett rationellt handlande beträffande en uppgifts matematiska intentioner.

Situationen som sådan kan alltså se likadan ut men, beroende på hur elever tolkar en aktivitets syfte och vilket deras egna mål med aktiviteten är, så skiljer sig deras förutsättningar för reflektion åt. Intressant blir därför att istället definiera kontext utifrån de individuella tolkningar elever gör av den situation de satts att agera i. I linje med ett konstruktivistiskt resonemang är det inte situationen i sig som är intressant utan istället elevernas tolkning av den, deras personliga konstruktion av situationen och dess mening (Wistedt & Brattström, in press).

Om vi låter elevers personliga konstruktioner av de begrepp som presenteras i en lärsituation falla inom ramen för den *begreppsliga* delen av en kontext, på samma sätt som föreställningar av lärsituationen tillskrivs den *situationella* och uppfattningen av normer och värderingar den *kulturella*, kan vi beskriva elevers sätt att ge mening åt nya begrepp i termer av kontextualisering (Halldén, 1999; Halldén & Strömdahl, 2003; Wistedt & Brattström, in press).

Halldén (1999) framhåller att alla tre delkontexterna är samtidigt närvarande då vi försöker lösa en uppgift men beroende på vad i situationen som prioriteras, vilka premisser som blir tydliga, och därmed väsentliga för eleverna, så förskjuts tyngdpunkten dem emellan. I lärsituationer och analyser över dessa så är det individers begreppsstrukturer som är av störst intresse och följaktligen blir det den begreppsliga kontexten i studier av lärande som sätts i fokus. Kontextualisering innebär alltså att den lärande konstruerar ett rum för lärande, i vilket hon kan ställa och utvärdera ny information och väga frågor och funderingar emot. Svårigheter med att förvärva nya begrepp uppfattas alltså inte som ett problem skapat av tidigare, naiva, begreppsuppfattningar utan istället som ett problem att finna relevanta kontexter för tolkning (*ibid.*).

Differentieringsprocessen, som jag ser det, får i ett sådant perspektiv två olika förlopp, vilka på olika sätt interagerar med varandra. För det första så gäller det att lära sig bli medveten om vilka parametrar som går att differentiera ut som väsentliga i en given situation. Det kan vara parametrar som är kopplade såväl till en uppgifts ämnesinnehåll (begreppslig kontext) som till den omgivning i vilken uppgiften presenterats (situationell och kulturell kontext). För det andra så gäller det att lära sig att differentiera mellan olika kontextualiseringar, dvs. att lära sig utvärdera och ställa olika kontextualiseringars för- och nackdelar mot varandra. Den lärande måste göras medveten om olika kontextualiseringars potential respektive tillkortakommanden. Lärande blir i ett sådant perspektiv ett resultat av att både finna relevanta tolkningar av den uppgiftssituation man satts att lösa, dvs. ett resultat av att differentiera ut, för eleven, relevant och produktiv information, som att ställa sig frågande till huruvida en konstruerad kontextualisering är fruktbar för en uppgifts lösning. För att tydliggöra detta resonemang kan vi titta på följande exempel:

> Antag att du skall sätta upp en skylt men upptäcker att du har glömt att ta med en hammare för att slå in den spik skylten skall hänga på. Vad gör du då? Du kanske börjar med att se dig omkring för att leta efter något annat att använda för att slå in spiken med. Men det du letar efter beror också av de egenskaper som du har differentierat ut vad gäller spikstorlek och det material du ska slå in spiken i. Du letar således efter material och föremål som passar för den kontextualisering du gjort av situationen. Låt säga att du finner ett lämpligt föremål, exempelvis en av de träskor du bär. I och med att du tar med träskon i din kontextualisering så startar också en process där du börjar utvärdera den kontextualisering du gjort. Enkelt uttryckt innebär detta att du ställer dig frågande till om det kommer att fungera med träskon eller om du bör leta upp ett annat föremål för ändamålet.

De tre delkontexterna kan, som tidigare antytts, med fördel ställas i relation till Pratts inre och yttre resurser. Istället för att se dessa som hinder i målet att utveckla en mer vetenskaplig kunskap så definierar Pratt dessa just som resurser. De inre resurser han identifierar kan ses som resurser att använda för att tolka och forma den begreppsliga kontexten på samma sätt som de yttre resurserna erbjuder verktyg för formandet av den situationella kontexten. Men i linje med elevers konstruktion av de olika kontexterna så faller många gånger Pratts inre resurser inom ramen för det jag beskrivit som den situationella/kulturella kontexten. Han ser exempelvis *fairness* som en inre resurs medan jag skulle vilja se denna resurs som ett element i den situationella kontexten, framförallt i de fall då resursen är kopplad till rent fysiska egenskaper. Likaså i de fall då hans lokala resurser står i relation till primära intuitioner, dvs. resurser som är förvärvade ur vardagen, så kommer den typen av meningsskapande process, kontextualisering, ofta att falla inom ramen för vad jag här kallar den kulturella kontexten. Det är också oklart om han ser en yttre resurs, säg läraren, som en resurs i sig själv eller om det, som jag här vill göra gällande, är elevers uppfattning om läraren och dennes intentioner som står för detta. Ytterligare ett exempel på ett liknande fenomen utgör den omtolkning Halldén (1999) gör av ett av Kahneman och Tverskys tidigare resultat. I en studie över studenters förmåga att dra slutsatser om betingad sannolikhet anser Kahneman och Tversky att eleverna lutar sig mot bedömningsmetoden *representativeness*. Här menar Halldén att det inte alls är säkert att studenterna har bristande kunskaper i sannolikhet utan att de istället har valt att placera uppgiften i en kontext där den typen av kompetenser förefaller ovidkommande. Man placerar uppgiften i en vardaglig, situationell kontext där behovet av matematiska beslutverktyg får låg prioritet. Yttre resurser skall alltså inte ses som något från individen fristående utan istället definierade som individuella konstruktioner, utifrån mental aktivitet, vilka utgör en del av kontextualiseringen. Utifrån Keren (1984) kan vi också tolka hans resultat som att eleverna har problem att finna relevanta kontexter för tolkning. Som vi såg tidigare så visar studien att eleverna har förmågan att koppla en händelses sannolikhet till motsvarande utfallsrum. De brister han finner i elevernas resonemang står istället i relation till det utfallsrum eleverna identifierar för uppgiften. Eleverna formar utfallsrum som är begränsade av deras kontextualisering av uppgiften och den begreppsliga repertoar som står till deras förfogande. Problem att ge korrekt respons kan därmed grunda sig i såväl den kulturella, situationella som den begreppsliga kontextualiseringen.

Denna kontextualiseringsproblematik beskriver ett allmänt problem för individer som ställs att lösa en uppgift men Halldén (1999) argumenterar för att även lärandeprocessen av något helt nytt går att ställa i relation till detta; "…what we are trying to learn, becomes intelligible when put in context and it is the context that can make the interpretation of the focal event plausible" (s. 64).

Precis som citatet ovan understryker så gäller det att finna relevanta kontextualiseringar mot vilka tolkningar av den centrala uppgiften kan ställas. Den lärande måste alltså finna en rimlig mening med uppgiften utifrån den kontext hon konstruerat, på samma sätt som hon måste finna en relevant kontext för uppgiftens mening. Detta innebär att de olika resurser som formar kontexten, inre som yttre, i sig själva måste generera respons på den lärandes agerande för att denne på ett lämpligt sätt skall kunna hantera, kontrollera och på så sätt utveckla sitt agerande.

Vi ser också att differentieringsmodellen över lärande stämmer överens med ett konstruktivistiskt förhållningssätt till utveckling. Jag argumenterade tidigare för det närmast paradoxala i att få kontinuitetsaspekten att passa in i en modell över lärande där detta beskrivs som att elever överger naiva, alternativa, föreställningar till förmån för vetenskapligt korrekta. Om utveckling istället beskrivs i termer av differentiering får man principen att stämma bättre. Här fokuseras hur etablerade idéer organiseras (och omorganiseras) med tidigare idéer och med nya som framkommit genom instruktion. I denna process måste kontinuitet och funktionalitet ses i ett ömsesidigt förhållande. Funktionalitet som begränsande för kontinuitet – då konstruktivismen förespråkar funktionalitet utifrån det man redan vet – och kontinuitet, på motsvarande sätt, begränsande för funktionalitet – då återkoppling av hypotetiska resonemang bottnar i tidigare föreställningar (Smith *et al.*, 1993).

# 4 Syfte

Studiens intresse är riktat mot hur elever i grundskolans årskurs sju hanterar aspekter av sannolikhet, ett begrepp som inte tidigare presenterats för dem i skolan. Syftet med studien är att beskriva hur eleverna tolkar uppgifter som innehåller aspekter av sannolikhet. Mer precist: att förklara elevers sätt att hantera aspekter av sannolikhet genom att, i termer av differentiering, beskriva deras olika sätt att kontextualisera uppgifter som aktualiserar sådana aspekter, givet de externa och interna resurser som står till deras förfogande.

# 5 Metod för datainsamling

Vilken typ av uppgifter kan fylla funktionen att ge den kunskap som efterfrågas i syftet? I linje med Wistedt *et al.* (1993, s.15) så har jag utgått ifrån följande krav på studiens uppgifter:

- de ska lätt aktualisera föreställningar som elever har, dvs. de bör handla om företeelser som eleverna känner till och som de kan antas ha intuitiva modeller för,
- de ska samtidigt vara sådana att de ger incitament till reflektioner över matematiska aspekter av sannolikhet och
- de ska dessutom vara av det slaget att de kan tänkas aktualisera en variation av föreställningar hos eleverna och därmed ge upphov till diskussioner och resonemang i grupperna.

Genom att, under ett spel- och tävlingsmoment, konfrontera elever med ett matematiskt område som inte blivit presenterat för dem tidigare i skolan hoppades jag kunna skapa en situation som tillmötesgick dessa krav, präglad av spontan elevaktivitet. Ämnesområdet i fokus är sannolikhet, ett område som i termer av begreppsuppfattning visat sig intressant såväl ur ett matematiskt som ur ett vardagligt perspektiv.

## 5.1 En förberedande studie – uppgift och studiens design

Först vill jag inleda med att ge en översiktlig beskrivning av en förberedande studie (Nilsson, 2002) och summera några slutsatser och förslag till omdesign, som sedan kom att användas i den aktuella undersökningssituationen.

Studiens syfte var att ge en övergripande inventering av fenomen med avseende på lärande, i anslutning till grupparbete i en experimentell miljö. Även om studieobjektet var relativt generellt så resulterade studien i en beskrivning av hur elever hanterar situationer som bär på element av osäkerhet och vidare vad som påverkar deras sätt att tolka och agera i situationen.

### 5.1.1 Datainsamling

Data för den förberedande studien insamlades under ett undersökningstillfälle vid en grundskola i Växjö. Åtta elever ur årskurs 7 deltog och delades in i fyra tvåmannalag. Lagen var placerade i var sitt hörn av klassrummet vid s.k. lagbord. Vid lagborden skulle man inom laget diskutera fram ”optimala” strategier i försök att vinna det spel som blivit presenterat för dem. När deltagarna ansåg sig klara spelade två lag mot varandra vid två spelbord, placerade tillsammans mitt i klassrummet.

Under aktiviteten var två observatörer närvarande samtidigt som förloppet spelades in på video. Förutom att observera i situationen så ingick det i observatörernas uppgift att svara på frågor om spelets regler. Gruppdiskussionerna vid lagborden blev också inspelade på ljudband, i syfte att fånga upp deltagarnas arbete med att diskutera fram spelstrategier. Deltagarna gavs också i uppgift att dokumentera sina strategier på en anteckningsmall för att ge mig möjlighet att, i efterhand, undersöka hur dessa ändrats under aktivitetens gång.

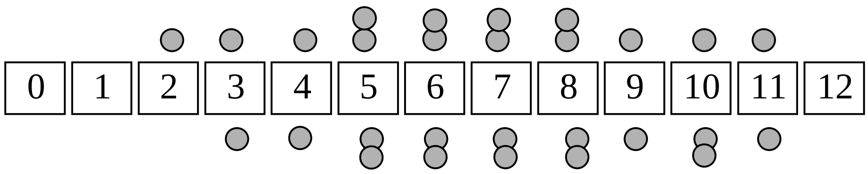
Spelet som låg till grund för den experimentella aktiviteten introducerades för mig av Ulla Öberg på Malmö högskola. Spelets design kommer ursprungligen från *The Mathematics Task Centre Project* i Australien och aktualiserar aspekter av sannolikhet i relation till summan av två tärningskast. Att använda tärningar som slumpgeneratorer har sin poäng i att de genererar interaktiva samband mellan vardagliga erfarenheter och önskvärda matematiska aspekter:

> Some RG, such as, dice, coins and urns, are common in western culture. All three are devices where a number of outcomes are clearly specified, and which can be manipulated in a well-defined way to produce one of these outcomes without it being possible for anyone or any machine to predict which outcome (Truran, 2001, s. 94)

*Presentation av spelet*

I studiens speldesign ingick en spelbricka, numrerad från 0-12, 14 marker och två vanliga tärningar. Deltagarna gavs sedan i uppgift att placera de 14 markerna bland de 13 nummer som är representerade på spelbrickan, med avseende på summan av två vanliga tärningar. Själva spelandet gick sedan ut på att om ett av lagen, eller båda, placerat åtminstone en marker på det utfall som tärningssumman visade så fick man ta bort exakt en marker därifrån. Det lag som först blev av med alla sina marker från spelbrickan vann.

Första uppsättningen för två lag:




Talen 0 och 1 ingick i spelbrickans utformning i syfte att stimulera diskussioner om utfallsrummets begränsning.

### 5.1.2 Förberedande studie – resultat och överväganden

Ingen av de grupper som ingick i studien hade några svårigheter med att inse omöjligheten med att få noll och ett vid summering av två tärningars respektive utfall. Alla grupper drog denna slutsats om utfallsrummets begränsning för summan direkt, dvs. innan första omgången spelats.

Vad som också infann sig i alla grupper var en intuitiv förståelse för vad som hade störst respektive minst chans. Under aktivitetens gång och med viss skillnad i resonemang så kom eleverna fram till att sjuan hade störst chans i motsats till två och tolv, som hade lägst chans. Relationer mellan övriga nummers olika proportioner i chans blev däremot mer svårhanterliga. Vi ser resultatet av detta i flera upplägg då eleverna placerat färre antal marker på ett nummer med högre chans, enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen, än på ett med lägre. Det föreföll inte som om eleverna baserat sina strategier på något systematiskt och reflekterat förhållningssätt till bakomliggande strukturer i spelet, exempelvis beträffande betydelsen av tärningarnas inbördes ordning. Istället antog flera grupper ett frekvensorienterat förhållningssätt som bedömningsmetod. Med detta menar jag att eleverna baserade sina strategier i huvudsak på den information som föregående spel gav. Följande utdrag från Annas och Albins dialog får fungera som illustration av detta. Vi kommer in i diskussionen efter att de har vunnit första omgången och nu är i färd med att diskutera fram nästa uppsättning. Anna inleder med att fråga:

- *Vad ska vi prata om nu? Att vi inte ska ha så många på sjuan nästa gång?*
- *Ja vi ska inte ha på sjuan!* svarar Albin. *Eller en på sjuan möjligen. En på sjuan då,* föreslår han och fortsätter med. *Sen, vilken fick vi många av?*
- *Vi fick fem och sånt, fem och typ åtta.*

Även om jag inte kan identifiera några explicita, logiskt grundade, resonemang beträffande jämförelser i sannolikhet så går det att utläsa vissa symmetrier i uppläggen. Dock, och i linje med vad Fischbein *et al.* (1991) iakttagit, så tenderade uppläggen att bli förskjutna mot de högre numren på spelbrickan. Generellt sett så lades exempelvis fler marker på 11 än på 3, vilket är en strategi som inte motiveras av det totala antal sätt som summorna kan erhållas på. Jag kommer att diskutera aspekter av detta mer i detalj då jag redogör för den aktuella studiens design.

Med avseende på de uppgiftskrav som presenterades tidigare fann jag att den förberedande studiens uppgifter inte på ett helt tillfredställande sätt uppfyllde alla krav. Med avseende på elevers frekvensorienterade förhållningssätt så stimulerade tärningsparet, på ett allt för otydligt sätt, elever till att upptäcka meningsfulla och användbara strukturer. Utifrån detta fann jag det därför väsentligt för den aktuella studien att ändra i tärningsdesignen, i syfte att låta eleverna agera över ett medium med en tydligare regelbundenhet, i termer av distinkta relativa frekvenser. En annan aspekt, relevant för ett modellbyggande i sannolikhet, var elevers sätt att begränsa utfallsrummet. Som tidigare nämndes så ställde inte detta eleverna inför några problem med aktuellt tärningspar. Om detta visar på förståelse av möjlig respektive omöjlig händelse i allmänhet får vi av elevernas resonemang inte klarhet i. Vad man som observatör kunde anta var att tärningsdesignens nära anknytning till vanliga sällskapsspel inte aktualiserade denna aspekt av modellbygget varför vi inte kan dra några generella slutsatser om elevers förståelse av detta fenomen. Därför blev detta ytterligare en aspekt att beakta i den aktuella studiens tärningsdesign.

## 5.2 Variationsteori

Om vi, utifrån resonemangen i teoribakgrunden, finner det relevant att definiera kognitiv utveckling i termer av en utökad och förfinad repertoar av och differentiering mellan olika lösningsstrategier, i relation till en kontextualiseringsprocess, så finns det anledning att titta närmare på aspekter som påverkar en sådan utveckling. Tidigare definierades tre delkontexter – begreppslig, situationell respektive kulturell kontext – vilka tillskrevs olika roller i kontextualiseringsprocessen. Dessa formar på olika sätt förutsättningar för lärande utifrån både inre aspekter, oberoende av situationen (begreppslig kontext), som yttre aspekter, vilka kan sägas vara beroende av den aktuella lärsituationen (situationell alternativt kulturell kontext) (Hallden *et al.*, 2001).

I anslutning till de övergripande uppgiftskraven, och med utgångspunkt i att vilja beskriva en differentieringsprocess, så vill jag här ytterligare motivera den uppgiftsdesign som låg till grund för den aktuella elevundersökningen. Utgångspunkten var; vad i en situation och dess design kan sägas stimulera elever att arbeta fram kontexter som erbjuder dem möjlighet till produktiv respons ur ett matematiskt perspektiv?

För att effektivisera en lärsituation i ljuset av att erbjuda den lärande möjligheten till produktiv respons framhåller Marton *et al.* (2003) variationens betydelse. Det centrala i deras teorier kring detta är att formandet av ett rum för lärande (eng. Learning space) innebär att man öppnar upp dimensioner av variation. Det hela bygger på det faktum att då man ställs inför en situation så ägnar man vissa aspekter mer och vissa aspekter mindre uppmärksamhet vilket i stort är vad jag tidigare beskrivit i kontextualiseringsprocessen som differentiering:

> A particular way of seeing something can be defined by the aspects discerned, i.e., the critical features of what is seen…
> …Attending to a certain aspect means comparing something we experience with other things that we have experienced earlier (*ibid.*, s. 7).

Författarna betonar att det inte går att urskilja någon särskild egenskap utan att ha erfarit någon dimension av variation kopplad till den egenskapen. Dock kan ett fenomen uppfattas som varierat på olika sätt. För det första kan variationsaspekten vara kopplad till tidigare egenskaper, utanför den aktuella situationen. En speciell egenskap känns igen och placeras i ett sammanhang utifrån kontinuitet, relaterad till tidigare erfarenheter och föreställningar. Författarna exemplifierar detta med ett dialektexempel. Två personer, A och B träffar en tredje person C. I samtalet talar alla tre med samma sydvästliga Nepalesiska dialekt. Men det är bara A som identifierar den som sydvästlig då person B aldrig varit utanför sitt språkområde och därför inte kan relatera den till någon variation utifrån tidigare erfarenheter. Om istället person C talat med en helt annan dialekt än A och B så hade också B noterat detta. Detta andra fall av variation är på ett mer direkt sätt kopplat till den aktuella situationen och är inte på samma sätt som den första relaterad till minnet. Möjligheten att uppfatta variation bottnar alltså i det vi tidigare framhållit som väsentligt i en lärsituation nämligen kontinuitet, relationer till tidigare erfarenheter och idéer och förmågan att differentiera ut väsentliga parametrar för situationen. Ur sina resultat finner Marton et al. följande former av variation, vilka kan ses som grundläggande i den variationsteori de presenterar (*ibid.*):

1. *Kontrast* – i linje med dialektexemplet ovan så måste man för att erfara något kunna ställa det i relation till något annat att jämföra med.
2. *Generalisering* – för att få full förståelse för ett fenomen eller egenskap så måste man erfara hur denna tar sig uttryck i olika sammanhang.
3. *Separation* – För att kunna erfara någon särskild aspekt av någonting, och att kunna urskilja denna från andra, så måste aspekten variera medan övriga hålls konstanta.
4. *Fusion* – Om det är flera kritiska aspekter den lärande måste överväga på samma gång så måste de alla erfaras samtidigt.

Kombinationen av framförallt de båda två sista punkterna framhåller författarna som ytterst väsentlig då man i det vardagliga livet sällan möter situationer där bara en aspekt varierar åt gången. Detta understryker ytterligare den linje jag tidigare framhållit som avgörande för effektivt lärande nämligen, förmågan att differentiera fram relevanta kontexter att ställa sina frågor mot:

> Our conjecture is, that seeing a certain class of phenomena in terms of a set of aspects that are analytically separated but simultaneously experienced, provides a more effective basis for powerful action than a global, undifferentiated way of seeing the same class of phenomena. (*ibid.*, s. 14)

Det skall dock framhållas att det rum för lärande som Marton *et al*. beskriver endast skall ses utifrån vad som är möjligt att lära, dvs. i relation till vad som står till elevernas förfogande att upptäcka. Detta skall jämföras med det rum som tidigare beskrevs i termer av individers personliga konstruktioner av ett innehåll, en situation och rådande kultur, dvs. hur elever uppfattar och drar nytta av vad som erbjuds i situationen. Vad jag hoppades kunna uppnå i kombinationen mellan dessa båda sätt att beskriva rum för lärande var att göra sambandet mellan individuella och situationella resurser så matematiskt gynnsamt som möjligt, dvs. att få situationen att stimulera och utveckla ett differentierat förhållningssätt i syfte att skapa relevanta kontexter för tolkning.

## 5.3 Aktuell design

Baserat på studiens teoretiska överväganden, tillsammans med implikationer från den preliminära studien och tidigare forskningsresultat, så fokuserar den aktuella studien interaktionen mellan inre och yttre resurser i termer av en kontextualiseringsprocess. Ämnesområdet i fokus är sannolikhet och designen av undersökningssituationen syftade till att aktualisera aspekter av detta, samtidigt som den inte skulle göra eleverna alltför begränsade i sitt agerande.

Den aktuella undersökningssituationen överensstämde till stora delar med den preliminära studiens. Med avseende på slumpförsök som är uppdelade i flera steg (delar), oberoende av varandra, så konfronterades även här elever i årskurs sju med en spelsituation under experimentella former. Grundprincipen för spelet var som tidigare att varje lag skulle fördela ett givet antal marker på en spelbricka utifrån summan av två tärningar. På samma sätt som i den förberedande studien så användes konkreta tärningar som slumpgeneratorer. En tanke med detta var att göra situationen så genomsynlig som möjligt för eleverna. Genom att låta dem vrida och vända på objekten i fråga så aktualiseras fler sinnen, varför det fanns anledning att tro att eleverna skulle erbjudas goda möjligheter att upptäcka relevanta och funktionella samband i situationen.

Det sätt på vilket den aktuella situationen skiljde sig från den preliminära går framförallt att finna i tärningarnas design. I den preliminära studien användes samma uppsättning vanliga tärningar under hela uppgiftssituationen. I den aktuella studien möttes istället deltagarna av ett nytt par tärningar inför varje ny spelomgång. Hur denna omdesign tog sig uttryck och vilka dess avsikter var, framförallt ur ett sannolikhetsperspektiv, kommer jag att mer i detalj beskriva i den a priori analys som presenteras nedan.

Data för studien insamlades på liknande sätt som för den förberedande studien. Åtta årskurs 7 elever från en annan grundskola i Växjö deltog och delades in i fyra tvåmannalag. Placerade vid lagborden, i var sitt hörn av klassrummet, diskuterade lagen fram sina strategier för att sedan utmana ett annat lag vid något av de två spelbord som var placerade mitt i klassrummet. Gruppdiskussionerna vid lagborden spelades in på ljudband samtidigt som aktiviteten i sin helhet spelades in på video. Två observatörer närvarade vars huvudsakliga uppgift, förutom att observera, även nu var att svara på frågor angående spelets regler. Utöver att dokumentera sina strategier på en anteckningsmall, för att ge mig möjlighet att i efterhand undersöka hur dessa ändrats under arbetet, gavs nu deltagarna också i uppgift, att under själva spelandet, pricka av summorna i frekvenstabeller.

### 5.3.1 En a priori analys av aktuell design – ett uppgiftssystem

I detta avsnitt vill jag beskriva och argumentera för den design som valdes för undersökningssituationen, i relation till såväl det matematiska som det epistemologiska perspektiv som tidigare betonats. Då detta är ett matematikdidaktiskt arbete som fokuserar personliga konstruktioner så har jag valt att framställa analysen utifrån olika möjliga sätt att uppfatta aktuella slumpsituationer. Detta innebär att analysen behandlar såväl relativt naiva föreställningar som matematiskt förfinade.

Situationen var uppdelad i fyra omgångar där varje omgång inleddes med att eleverna presenterades för en ny uppsättning tärningar. Den spelbricka som eleverna fördelade sina marker på var samma i alla fyra omgångarna med följande utseende:

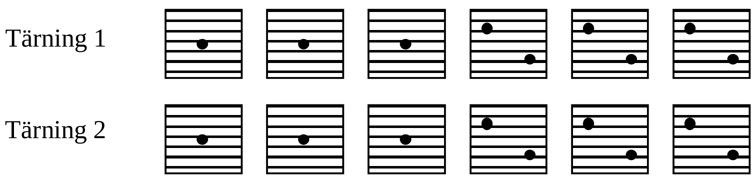
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Utformningen på brickan var vald i syfte att erbjuda eleverna möjlighet att jämföra sannolikheter mellan olika händelser på ett tydligt sätt. Att nollan inte var representerad den här gången berodde på att den inte erbjöd något ytterligare i analytiskt värde för tolkningsarbetet av den preliminära studien. Vi kommer emellertid att se att brickan innehöll värden som var omöjliga för slumpförsöket. Syftet med detta var att stimulera elevernas agerande beträffande summornas utfallsrum, i termer av skillnad mellan möjliga och omöjliga utfall.

I den preliminära studien såg jag att flera grupper antog en frekvensorienterad ansats i sitt arbete att utforma nya satsningar. Nya satsningar grundade sig i vad som kom upp under förra spelomgången. Utifrån ett lärperspektiv föranledde detta sätt att kontextualisera en slumpsituation två huvudsakliga förändringar i design. För det första så utformades de nya slumpgeneratorerna på så sätt att summornas relativa frekvenser skulle bli mer distinkta än för två vanliga tärningar. Hur detta tog sig uttryck kommer vi att se då jag mer i detalj går igenom respektive tärningspars design. För det andra så kan man i den preliminära studien tolka elevernas agerande som att de endast lutar sig mot de avslutande tärningsresultaten. De har, av förklarliga skäl, haft svårt att överblicka hela spelets utfallsserie, och proportioner mellan resulterande summor. Därför ingick det nu i elevernas uppgift att också föra in de summor som kommer upp i s.k. frekvenstabeller. I anslutning till detta gavs också eleverna, efter varje spelomgång, i uppgift att reflektera över huruvida de skulle ändra sina satsningar om de, med samma tärningar, fick spela spelet en gång till. Antog eleverna en frekvensorienterad ansats så ansåg jag att dessa korrigeringar på ett bättre sätt än tidigare skulle erbjuda dem möjlighet att upptäcka relevanta samband för nya kontextualiseringar. Men man kan också ställa nyttan av distinkta frekvenser i ett allmänt utvärderingsperspektiv för eleverna. Ponera att elever, explicit eller implicit, ställer vissa hypoteser i de satsningar de gör. För att kunna dra slutsatser om hur dessa satsningar fungerade så blir det väsentligt för eleverna att få möjlighet till tydlig feed-back från spelet i allmänhet och de utfall som genereras i synnerhet.

*Omgång 1 – Gula uppsättningen*

Den första uppsättning tärningar som eleverna möttes av kan sägas modellera det i litteraturen ofta förekommande slumpförsöket att kasta två mynt. De två aktuella tärningarna, som båda var gulfärgade, hade följande antal ögon på sina respektive sex sidor:




Tillsammans med spelbrickans utformning syftade denna inledande tärningsdesign i huvudsak till att stimulera aspekter av möjligt respektive omöjligt utfall. Genom att ställa eleverna inför en tärningsdesign som skiljer sig markant från vad de tidigare är vana vid, från olika typer av sällskapsspel, så hoppades jag aktivera den typen av resonemang. Man kan uppfatta slumpförsöket att kasta de två tärningarna på olika sätt. Speciellt så måste man, för att reda ut situationen, kunna bilda summorna 1+1, 1+2 och 2+2 då detta ligger till grund för bedömning av möjligt respektive omöjligt utfall. I avsnitt 2.2.1 införde vi begreppet *slumpvariabel* som en beteckning för den aspekt vi är intresserade av i ett slumpförsök. Om vi låter slumpvariabeln *S* ange summan av de två tärningskasten så antar den värdena 2, 3, 4, dvs. den antar värden med avseende på utfallsrummet $\Omega_S = \{2, 3, 4\}$. Som jag argumenterade för under avsnitt 2.2.1 så står detta utfallsrum i nära relation till de resultat som slumpförsöket visar explicit. I slantsinglingsförsöket är motsvarande utfallsrum Ω = { (två krona), (en krona och en klave), (två klave)}.

Men, beträffande en summas sannolikhet så har flera studier visat (Fischbein *et al.*, 1991; Lecoutre, 1992) att elever inte verkar äga någon intuitiv förståelse för betydelsen av tärningarnas ordning. För det aktuella tärningsparet höll jag det därför för troligt att eleverna skulle få svårigheter med att kontextualisera skillnaden mellan utfallen $(1, 2), (2, 1)$, vilket var avgörande för en tillfredsställande bedömning av sannolikheterna.

Om man utgår ifrån de värden som är representerade på de enskilda tärningarnas sidor i form av antal ögon så kan detta matematiskt beskrivas utifrån de oberoende slumpvariablerna $X_1$ och $X_2$, som båda har utfallsrummet:

$$\Omega_{X_1} = \{1, 2\}$$
$$\Omega_{X_2} = \{1, 2\}$$

Utfallsrummet för alla ordnade par mellan $X_1$ och $X_2$ kan sedan beskrivas med slumpvariabeln $(X_1, X_2)$, som har utfallsrummet:

$$\Omega_{(X_1, X_2)} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Med utgångspunkt i antal ögon finner vi att vi har två möjliga talpar (ögonpar) som genererar summan 3 medan vi bara har ett för summan 2 och 4. Med avseende på antalet gynnsamma fall får vi alltså sannolikheter enligt:

$$P(S = 2) = P(S = 4) = \frac{1}{4}$$
$$P(S = 3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ett alternativt sätt att uppfatta situationen på vore att man mer i detalj går igenom tärningsstrukturen och tittar på tärningarnas skilda sidor. Med detta menar jag att varje sida på tärningen kan ses representera ett specifikt utfall. Med matematiska beteckningar så kan vi beskriva detta i termer av slumpvariablerna $T_1$ och $T_2$ som antar värden i utfallsrummen:

$$\Omega_{T_1} = \{1_a, 1_b, 1_c, 2_d, 2_e, 2_f\}$$
$$\Omega_{T_2} = \{1_g, 1_h, 1_i, 2_j, 2_k, 2_l\}.$$

Med avseende på ordnade par (sidpar) mellan de båda slumpvariablerna, så kan vi med ett diagram konstruera det utfallsrum som gäller för slumvariabeln $(T_1, T_2)$. Om vi avsätter den ena tärningen på den vågräta axeln och den andra på den lodräta så kan detta illustreras enligt:

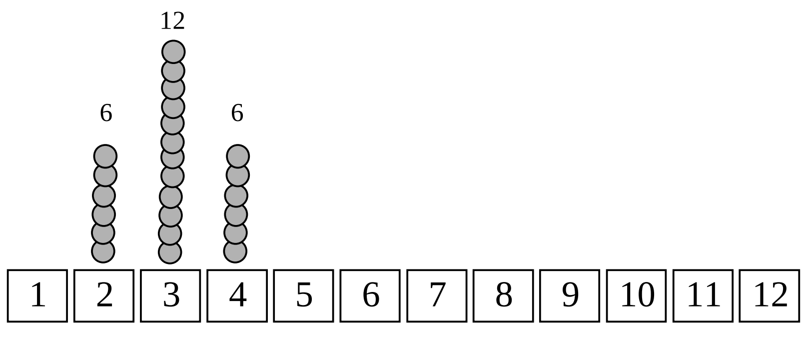
| $T_2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,2) | (2,2) |
| **2** | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,2) | (2,2) |
| **2** | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,2) | (2,2) |
| **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) | (2,1) |
| **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) | (2,1) |
| **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) | (2,1) |
| | **1** | **1** | **1** | **2** | **2** | **2** |
| | $T_1$ | | | | | |

Utgår man från tärningarnas respektive sidor, för slumpförsöket att kasta två tärningar, så får vi enligt diagrammet en slumpvariabel som kan anta 36 möjliga värden. Med avseende på summan ser vi att antalet gynnsamma fall att erhålla de tre summorna på skiljer sig åt även här. Då jag har för avsikt att använda välbalanserade tärningar så blir alla 36 utfallen lika sannolika, *equiprobable*, och den klassiska definitionen av sannolikheten ger att:

$$P(S=2)=P(S=4)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$
$$P(S=3)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

Vare sig man begränsar sig till att endast utgå ifrån de värden som är representerade på tärningarna, i form av antal ögon, eller om man mer i detalj beskriver utfallen i relation till tärningarnas alla sidor så får vi en och samma sannolikhetsfördelning för de tre summorna. Det är alltså lika stor chans att få en två som en fyra och dubbelt så stor chans att få en trea som en tvåa enligt det klassiska sättet att tillordna sannolikheter i båda fallen.

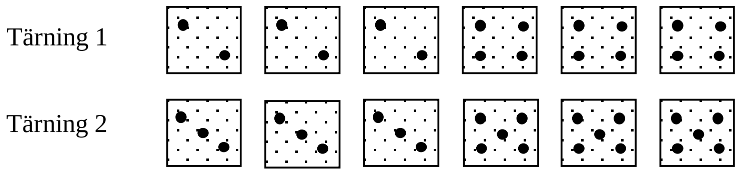
Antalet marker att fördela över spelbrickan i den första omgången är 24. Med utgångspunkt i de två matematiska modellerna så kan därför följande fördelning av dessa 24 marker sägas vara mest relevant:



Men då jag, med stöd i litteraturen, hade anledning att tro att eleverna inte skulle stödja sina bedömningar med hänsyn till tärningarnas ordning så var den huvudsakliga intentionen med den första uppsättningen att stimulera elevers kontextualiseringar med avseende på skillnad mellan möjligt respektive omöjligt utfall beträffande summorna.

*Omgång 2 – Röda uppsättningen*

I den andra omgången skulle också 24 marker fördelas. Det tärningspar som låg till grund för andra omgångens spel hade följande design:




Denna uppsättning tärningar gav eleverna möjlighet att upptäcka två huvudsakliga aspekter av en sannolikhetsmodell. För det första så ville jag ytterligare få eleverna att resonera kring skillnaden mellan möjligt och omöjligt utfall. Den röda designen kan sägas ”maskera” en del omöjliga utfall, utfallen 6 och 8, då de summor som är möjliga är utfallen 5, 7, 9. Med utfallens beteckningar så beskrivs utfallsrummet för slumpvariabeln $S$ av $\Omega_S = \{5, 7, 9\}$. I anslutning till detta så ville jag även undersöka om eleverna, i sina kontextualiseringar av summornas fördelning, differentierade ut de distinkt skilda utfallen för summan sju. I första omgången argumenterade jag för det svåra i att uppfatta tre som den summa med störst chans då det kan vara svårt att skilja mellan utfallen $(1, 2)$ och $(2, 1)$. För det nya tärningsparet behövde man aldrig hamna i den situationen. Om vi antar att eleverna utgår från de enskilda tärningarnas likformiga fördelning så erbjuds de här möjlighet att finna stöd för skillnad i chans mellan de tre tärningssummorna utan att behöva ta tärningarnas inbördes ordning i anspråk. Summan sju kan fås som två skilda utfall nämligen som 5+2 eller 4+3. Ställer vi dessa två utfall i relation till det ”enda” som genererar summan 5, nämligen 3+2, och det som genererar summan 9, nämligen 5+4, så kan vi dra slutsatsen att vi har dubbelt så stor chans att få 7 som att få 5 respektive 9. På samma sätt som i första uppsättningen kan vi formalisera denna aspekt i matematiska termer. Med avseende på antal ögon så definierar vi slumpvariablerna $X_1$ och $X_2$. Motsvarande utfallsrum är:

$$\Omega_{X_1} = \{2, 4\}$$

$$\Omega_{X_2} = \{3, 5\}$$

Utfallsrummet för slumpvariabeln $(X_1, X_2)$ är då:

$$\Omega_{(X_1, X_2)} = \{(2, 3), (4, 3), (2, 5), (4, 5)\},$$

vilket ligger till grund för en bedömning av respektive sannolikhet för summorna som:

$$P(S = 5) = P(S = 9) = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 7) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Med avseende på de enskilda tärningarnas alla sidor så kan vi som tidigare illustrera slumpförsökets samtliga 36 utfall med följande diagram:

| $T_2$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **4** | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (5,4) | (5,4) | (5,4) |
| | **4** | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (5,4) | (5,4) | (5,4) |
| | **4** | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (5,4) | (5,4) | (5,4) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) | (5,2) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) | (5,2) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) | (5,2) |
| | | **3** | **3** | **3** | **5** | **5** | **5** |
| | | | | $T_1$ | | | |

Antalet gynnsamma fall av 36 möjliga ger oss därför följande sannolikheter för de tre summorna:

$$P(S=5) = P(S=9) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(S=7) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

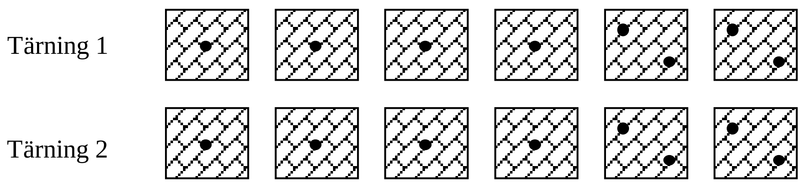
vilket givetvis är samma som vi fick genom att utgå från antal ögon.

Den röda designen aktualiserade alltså ytterligare aspekter i den matematiska ansatsen. För det första så skulle det bli avgörande för eleverna att bringa ordning i vilka utfall som var omöjliga, och som här var lite mer dolda än i den första omgången, och för det andra så stod en tydligare design till elevernas förfogande vad gäller markernas fördelning i termer av olika utfall och proportionalitet. I flera avseenden överlappar emellertid dessa aspekter varandra. Differentierar man exempelvis ut de fyra olika utfallen att få summorna på så löser man konflikten mellan möjligt respektive omöjligt utfall automatiskt. Intressant blir därför att undersöka hur eleverna prioriterat och differentierat mellan dessa båda aspekter och i vilka avseenden de båda kan sägas ha stimulerat eller begränsat varandra.

I de båda inledande slumpförsöken så finner vi att vare sig vi kontextualiserar med avseende på antal ögon eller med avseende på sidor så får vi en och samma sannolikhetsfördelning för summorna, som kan sägas vara relevant med avseende på den klassiska sannolikhetsdefinitionen. De avslutande två tärningsuppsättningarna aktualiserade aspekter i slumpförsöket där denna likhet inte längre gällde.

*Omgång 3 – Blå uppsättningen*

Den tredje tärningsuppsättningen hade sidor med följande design och fördelning:



Vi ser direkt att utfallsrummet för summan är densamma som för den första uppsättningen tärningar. Summornas möjliga utfall är 2, 3, 4 och utfallsrummet är $\Omega_S = \{2, 3, 4\}$. Min förhoppning med designen var att de tidigare spelomgångarna, speciellt den första, skulle ha genererat sådan respons till eleverna att denna aspekt i situationen insågs av eleverna närmast automatiskt. Med detta menar jag att även om aspekten gavs låg prioritet i deras strategidiskussioner så skulle den få en tillfredställande lösning ändå. Avsikten med detta var att erbjuda eleverna möjlighet att istället fokusera händelsers sannolikheter i termer av antal utfall, som genererar respektive summa, och proportionalitet.

Lecoutre (1992) har argumenterat för att elever löser uppgifter i sannolikhet med avseende på olika modeller. Den modell som denna design kan sägas aktualisera är vad hon kallar för *number model*. Denna modell innebär att eleverna vill låta avspegla de enskilda tärningarnas fördelning i fördelningen över summorna. Detta vore i någon mening vad Kahneman och Tversky (1972) skulle kalla för *representativeness*; man matchar summornas utfall mot den egenskap som ligger till grund för processen, här de enskilda tärningarnas design. Det man som observatör kan ställa sig frågande till är vad som stimulerar ett sådant tänkande. Är det bara de enskilda tärningarna i sig som eleverna har i fokus eller kontextualiserar de i termer av antal gynnsamma utfall och proportionalitet? Om vi utgår ifrån att de håller för troligt att enskilda tärningars design påverkar olika summors sannolikhet, samtidigt som de fortfarande har svårigheter med att uppfatta betydelsen av tärningarnas ordning, så anser jag att ett alternativ till representativeness vore att istället titta på vilka möjliga utfall eleverna ställer till sitt förfogande för sina bedömningar. Kontextualiserar man aspekten att det finns fler ettor än tvåor på ena tärningen att sätta ihop med fler ettor än tvåor på den andra så rimliggör ju detta, i någon mening, nummermodellen utifrån antal sätt. Detta sätt att se på elevers agerande vore mer i linje med en annan av Kahneman och Tverskys (*ibid.*) bedömningsmetoder, nämligen availability eller naiv kombinatorik. Vi finner också stöd för detta i det som Keren (1984) identifierat vad gäller relationen mellan sannolikhet och utfallsrum.

Med avseende på antal ögon ser vi att slumpvariablerna $X_1$ och $X_2$ är desamma som i det första slumpförsöket. Detta innebär att ögonparens slumpvariabel $(X_1, X_2)$ för den blå designen har identiskt utfallsrum som den gula, nämligen

$$\Omega_{(X_1, X_2)} = \{(1,1), (1, 2), (2,1), (2, 2)\}.$$

Lutar vi våra bedömningar mot detta utfallsrum vet vi sedan tidigare att vi tillordnar summan tre dubbelt så stor sannolikhet som summorna två och fyra. Men, då tärningsdesignen mellan den gula och blå uppsättningen skiljer sig åt på ett avgörande sätt, nämligen att de fyra utfallen har skilda sannolikheter, så är valet av slumpvariabel inte helt tillfredsställande.

Går vi över och tittar på de oberoende slumpvariablerna $T_1$ och $T_2$, vilka står i relation till de enskilda tärningarnas sidor, så kan vi skapa oss en mer nyanserad bild av den struktur som ligger bakom sannolikheten för summorna. Utfallsrummet för alla ordnade sidpar, mellan $T_1$ och $T_2$, kan som tidigare beskrivas med slumpvariabeln $(T_1, T_2)$. För det aktuella tärningsparet så blir utfallsrummet för $(T_1, T_2)$ här:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,2) |
| | **2** | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,2) |
| | **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) |
| $T_2$ | **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) |
| | **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) |
| | **1** | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,1) | (2,1) |
| | | **1** | **1** | **1** | **1** | **2** | **2** |

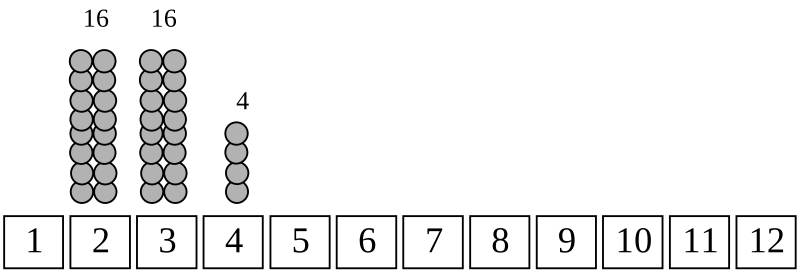
$T_1$

Utifrån antalet gynnsamma fall som vi identifierar i diagrammet, för händelserna att få summan 2, 3 eller 4, så blir således sannolikheterna:

$$P(S=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(S=2)=P(S=3)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

Utifrån den klassiska sannolikhetsdefinitionen är det alltså fyra gånger så stor chans att få exempelvis en tvåa som att få en fyra. Då eleverna skall fördela 36 marker i omgång 3 så vore det, med avseende på tärningarnas sidor, lämpligt med följande upplägg:



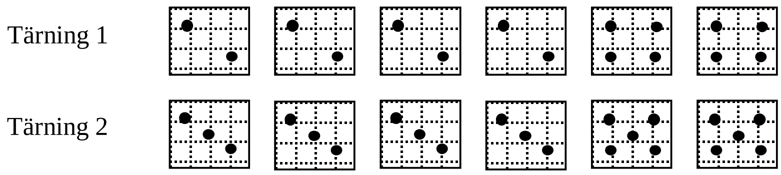

Med avseende på diagrammet ovan ser vi att det inte är helt irrelevant att tolka försöket i termer av en nummermodell. Svårigheterna står som tidigare i relation till ordningens betydelse

Min förhoppning med den blå designen var att den skulle vara så pass lik den gula att summorna identifierades direkt, samtidigt som den skulle få eleverna att ytterligare reflektera över hur enskilda tärningars struktur förhåller sig till summornas sannolikhet, både vad gäller reflektion kring strategival som reflektion i utvärderingsarbetet i termer av relativa frekvenser.

*Omgång 4 – Vita uppsättningen*

Med avseende på Martons variationsteori kan de tre första uppsättningarna sägas stå i relation till de tre första aspekterna, presenterade tidigare. Aspekten *kontrast* i relation såväl till vanliga tärningar som till de förändringar som implicerades fortlöpande i designen. Förändringen av tärningsdesignen aktualiserar också *generaliseringsaspekten*, då man får göra reda för samma aspekter i nya situationer. Beträffande *separation* så var avsikten med de tre första uppsättningarna, i möjligaste mån, att erbjuda eleverna möjlighet att fokusera en parameter i taget. I den första stod detta i relation till möjlig och omöjlig händelse. Skillnad mellan möjlig och omöjlig händelse aktualiseras också i den andra uppsättningen men här ville jag framförallt lyfta fram möjligheten för eleverna att ställa summors olika chans mot varandra utan att behöva ha förståelse för enskilda tärningars ordning. Som jag argumenterat för ovan så anser jag den tredje uppsättningen aktualisera antal sätt och proportionalitet ytterligare.

Om vi övergår till den fjärde uppsättningen tärningar som eleverna agerade över så kan den på liknande sätt som de tre första kopplas såväl till kontrastaspekten som till generaliseringsaspekten. Det jag avsåg att ytterligare implicera med denna avslutande design var *fusionsaspekten*. Detta innebar att jag ville erbjuda eleverna möjlighet att agera över en design där tidigare intentioner och aspekter av sannolikhet kom till utryck i en och samma situation. Följande uppsättning tärningar presenterades därför för eleverna i den fjärde och sista omgången:




Vi ser att detta tärningspar förhåller sig till den röda designen som den blå gjorde till den gula. Detta innebär att vi kan definiera *S* som summan för de två tärningskasten med utfallsrummet $\Omega_S = \{5, 7, 9\}$. Även om detta utfallsrum är lite mer maskerat än i den gula och blå designen så var avsikten med denna likhet även här att eleverna inte skulle behöva lägga allt för stor vikt vid att göra reda för summornas möjliga respektive omöjliga utfall. Precis som i den blå omgången så önskade jag med de vita tärningarna att eleverna istället skulle prioritera summornas sannolikheter. I den aktuella designen ser vi att detta kan ta sig uttryck på två sätt. Det första i relation till slumpvariablerna $X_1$ och $X_2$ i den röda uppsättningen tärningar, dvs. utan att behöva se till tärningarnas ordning kan man finna olika sätt att erhålla summan sju på. Det andra i relation till den blå uppsättningen. Som jag argumenterade för under beskrivningen av den blå designen så fanns det skäl att anta att designen skulle ställa aspekter av sannolikhet till förfogande för eleverna i termer av proportionalitet. Om vi illustrerar samtliga möjliga utfall får vi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **4** | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (5,4) | (5,4) |
| | **4** | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (3,4) | (5,4) | (5,4) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) |
| $T_2$ | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) |
| | **2** | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (3,2) | (5,2) | (5,2) |
| | | **3** | **3** | **3** | **3** | **5** | **5** |

$T_1$

Med utgångspunkt i detta ser vi att antalet gynnsamma utfall för respektive summa leder oss till följande proportioner:

$$P(S=9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(S=5)=P(S=7)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

Avsikten med a priori analysen har varit att i möjligaste mån försöka illustrera hur olika aspekter kan komma att aktualiseras med den uppgiftsdesign som valdes. Men också hur vi kan se att olika tolkningar av ett slumpförsök, med avseende på olika slumpvariabler, kan erbjuda olika rum för tolkning i elevernas agerande. De i diagrammen illustrerade representationerna, av alla tänkbara utfall, kan sägas vara den optimala kontextualiseringen av slumpförsöket. Har man tillgång till denna typ av föreställning så har man också en bred begreppslig repertoar till förfogande. Vi ser att med hjälp av den diagrammatiska modellen kan vi exempelvis reda ut de övriga sätten att kontextualisera slumpvariabler på. I termer av differentiering och dimensioner av variation så erbjuder modellen alltså en större frihet för tolkning och flera begreppsliga domäner att differentiera mellan.

# 6 Analysmetod

I analysen vill jag identifiera och förklara det sätt på vilket elever uppfattar och hanterar en situations matematiska innehåll, här i en experimenterande miljö, i termer av processerna kontextualisering och differentiering. För detta kommer jag att använda en analysmetod, under vilken elevers agerande tillskrivs mening i termer av intentioner.

## 6.1 Intentionell analys

Metoden kallas intentionell analys och principerna för denna introducerades av von Wright (1971) i *Explanation and Understanding* i avsikt att utgöra en bas för analysarbeten över innebörden i mänskligt agerande. För att få förståelse för varför människor agerar som de gör i en viss situation argumenterar Von Wright för det nödvändiga i att betrakta individers agerande som intentionellt. Det är utifrån en persons intentioner som hennes beteende blir meningsfullt och kan förstås i termer av en handling. Att förklara en handling utifrån ett sådant intentionellt perspektiv innebär att vi måste identifiera de avsikter som ligger till grund för handlingens uppkomst (Scheja, 2002).

Ett sätt att finna struktur i en persons intentionella agerande innebär, i överensstämmelse med von Wright, att agerandet kopplas till en praktisk syllogism. Då syllogismen kan vara utformad på olika sätt låter jag följande fungera som illustration (Halldén, 1999; Scheja, 2002):

P 1 En person *P* har intentionen att uppnå *x*.
P 2 *P* tror inte hon kan uppnå *x* utan att göra *y*.
S Sålunda, *P* gör *y*.

Vad en observatör ser är handlingens slutsats, dvs. en person *P* som utför *y*. Genom att tillskriva *P* intentionen att försöka uppnå *x*, som premiss 1, så finner vi en anledning till varför *P* gjorde *y*, under de omständigheter som är implicerade i premiss 2. I termer av von Wright (1971):

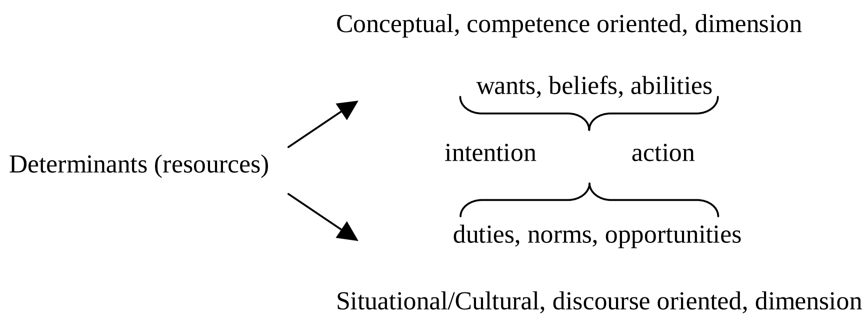
> Behaviour gets its intentional character from being seen by the agent himself or by an outside observer in a wider perspective, from being set in a context of aims and

> cognitions. This is what happens when we construe a practical inference to match it, as premises match a given conclusion. (s. 115)

Perspektiven i fråga kan sedan variera beroende på vilken handling vi har för avsikt att identifiera, vilket syfte vi har med observationen. En handling i ett perspektiv kan bli en del av en handling i ett annat. Ser vi exempelvis någon som försöker tända en tändsticka kan detta vara en del av handlingen att tända ett ljus. Att tända ett ljus kan å andra sidan, i sig, övergå till att bli en del i en annan handling, i exempelvis handlingen att skapa stämning. Fortsättningsvis kommer jag att försöka skilja på termerna handling och agerande (beteende) åt. Med handling vill jag mena hela förloppet i syllogismen, medan jag med agerande endast önskar fokusera det observerbara beteendet, verbalt som icke-verbalt. Att tända ett ljus ses därmed som ett agerande under handlingen att skapa stämning.

De intentioner som diskuterats här bör inte betraktas som psykologiska egenskaper eller tillstånd utan istället som redskap för forskaren att söka klarhet i det beteende som framträder bland deltagarna. En analys som denna valideras därför inte med hänvisning till elevens egen syn på sitt agerande utan den valideras genom graden av rationalitet i beskrivningen (Halldén, 2001).

Vi ser i den praktiska syllogismen att intentionen under premiss 1 står i direkt relation till det verbala eller icke-verbala agerandet i slutsatsen S. Vad som dock inte framkommer ur denna relation är varför ett specifikt agerande, det agerande vi observerar, valts för att uppnå den tillskrivna intentionen i fråga. Länken för denna relation kan premiss 2 sägas utgöra. Denna premiss skall därför ses som ett mentalt steg ur vilket vi kan finna förklaring till varför ett specifikt agerande valts för en intention (Scheja, 2002). Den ram en person uppfattar sig agera inom går inte att bortse ifrån. Von Wright (1979) beskriver denna relation utifrån termerna inre och yttre determinanter. Med utgångspunkt i detta resonemang har sedan en undervisningsrelaterad modell utarbetats i försök att precisera och redogöra för de relationer som gör sig gällande i den praktiska syllogismen, i termer av kontextualisering (Halldén, 1999; Halldén & Strömdahl, 2003; Scheja, 2002):




I sina teorier om didaktiska situationer relaterar Brousseau (1997) fenomen som determinerar en handling till det didaktiska kontraktet. Detta kontrakt menar han ligger till grund för de föreställningar, förväntningar och uppfattningar elever och lärare har om de spelregler en situation implicerar.

En intentionell handling måste alltså ställas i relation till sitt sammanhang. Med hjälp av att tillskriva en elevs agerande en intention och ställa denna, och hela den praktiska syllogismen, i relation till de inre och yttre resurser eleven har till förfogande så kan vi alltså tala om elevers sätt att hantera en lärsituation i termer av kontextualisering. Kontextualiseringsprocessen kommer, som jag ser det, till uttryck i två olika faser. Den första kan sägas stå i relation till den intention och avsikt eleven har problematiserat i sitt agerande och den andra mot det sätt på vilket eleverna söker lösning på den problematisering som gjorts. Dessa två faser ser jag endast vara av metodologisk betydelse, i syfte att förklara konstruktionen av och relationer i den praktiska syllogismen. Det sammanlagda agerandet måste ses som en ömsesidig process mellan dessa båda kontextualiseringsfaser i termer av differentiering. Då jag tidigare poängterade att en handling i ett perspektiv kan ses som en del av en handling i ett annat så skulle vi också kunna beskriva dessa båda faser som samma, placerad i två olika handlingar.

Beroende på vad i situationen som prioriteras av individen, hur tyngdpunkten i elevernas kontextualisering är förskjuten, så blir vissa delkontexter mer framträdande i konstruktionen av den praktiska syllogismen. Som beskrevs i teoriavsnittet så innefattas den begreppsliga kontexten av de aspekter i elevers kontextualiseringsprocess som fokuserar kognitiva strukturer av en situations begreppsliga innehåll. I ett lärperspektiv för matematik kan detta uttryckas som att analysen ”*fokuserar handlingar i situationer som aktualiserar matematiska begrepp och tankestrukturer*” (Wistedt *et al.*, 1996, s. 3)

### 6.2 Presentation av data

Den intentionella analysen syftar till att fånga elevers sätt att kontextualisera en lärsituation. I arbetet att undersöka elevers kontextualiseringar kommer därför deras strategidiskussioner att spela en avgörande roll i tolkningsarbetet. I hopp om att kunna ge en så överskådlig bild som möjligt över denna diskussionsempiri har jag därför valt att presentera signifikanta data med exemplifierande utsagor i berättande form. Detta innebär att elevers egna utsagor, markerade med kursiverad stil, är kopplade till varandra via olika kommentarer. Dessa kommentarer kan i vissa fall vara av liten betydelse för innehållet (exempelvis uttryckta som “sa Peter”), men i vissa fall kan de ha karaktären av att understryka betoningar i språket, kroppsrörelser osv. Ord som uttalas med eftertryck markeras med fet stil. Men, min förhoppning, med arbetet att återge empiriska data i form av narrationer, är att i presentationen försöka minimera egna tolkningar, i syfte att på så vis erbjuda läsaren möjlighet att bilda sig en egen uppfattning av förloppet.

I ett försök att öppna för diskussion om empirin har jag valt att lyfta fram och följa en av de fyra grupperna genom hela situationen. I analysen av de fenomen vi kan se utifrån denna grupps agerande, framställt i ovan beskrivna narrationer, kommer data från övriga grupper att fungera som komplement och stöd i efterföljande analysarbete.

Då syftet med studien är att försöka fånga elevernas sätt att differentiera och kontextualisera i en fortlöpande process så finner jag det lämpligt att, i direkt anslutning till naturliga avbrott i den didaktiska designen, dela upp analysarbetet. De kontextualiseringsfenomen som i delanalyserna varit mest tongivande kommer också att sammanställas i en analyssammanfattning.

## 7 Resultat och analys

I försök att öppna för diskussion av resultaten har jag tidigare förklarat att jag väljer att presentera empiriska data i berättande form. Vi kommer att följa grupp C, som består av Peter och Sabina, genom hela situationen. De tre övriga grupperna är Tom och Louise (grupp A), Mats och Jenny (grupp B) samt Petra och Lars (grupp D).

**Omgång 1 – gula uppsättningen**

Tärningarna i omgång ett var designade enligt (111 222) och (111 222).

Gruppdiskussionen inleds med att eleverna försöker skapa sig en bild av vilka summor som är möjliga med det aktuella tärningsparet. De provslår tärningarna och efter att Peter antytt, lite otydligt, att det går att få fyror så begränsar Sabina utfallsrummet ytterligare i följande resonemang:

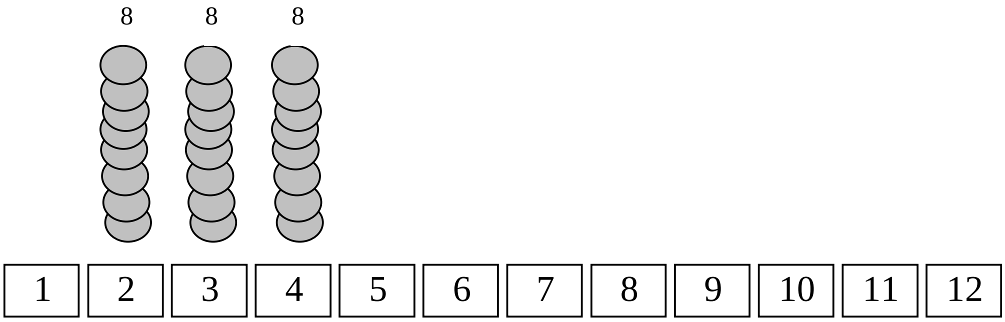
- *Det kan ju inte bli något annat. Men det kan ju inte bli mindre än två heller…så då måste vi köra mellan ett och, nä ett kan det inte heller bli*
- *Mellan ett och fyra?* Frågar Peter.
- *…för ett kan det inte heller bli…Två, tre och fyra satsar vi på,* fortsätter Sabina.
- *Tre kan det också bli,* bekräftar Peter vilket avslutar diskussionen kring summornas möjliga utfall.

Det resonemang Sabina för kan till stora delar tolkas som att hon tänker högt. Peter håller en lägre profil i diskussionen och bekräftar i stort bara det som Sabina redan sagt. Det utfallsrum man identifierat för summorna och begränsat sig till är korrekt även om vi inte kan se att det framkommit med hjälp av någon mer ingående systematisk strategi. Det enda vi kan se i detta avseende är att de först identifierar ytterligheter bland summorna. Övergången till att diskutera markernas fördelning över summornas utfallsrum sker i linje med tidigare diskussion, dvs. där Sabina driver diskussionen i stort sett med sig själv:

- *…lika många på varje, det finns?…Hur många blir det på varje?* undrar hon. *Tjugofyra delat på tre…åtta blir det eller?*
- *Ja just det hm,* skjuter Peter in.

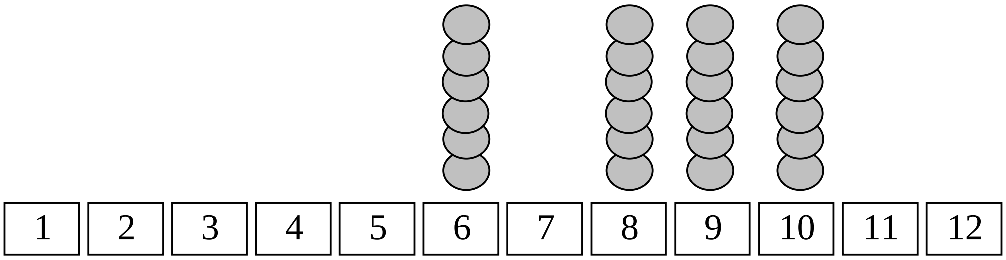
Efter detta läser man på pappret att man skall sammanfatta varför man tror sig ha störst chans att vinna med det upplägg man arbetat fram. Som svar på detta uttrycker Sabina; *För att det inte kan bli mer än fyra*.

Det upplägg man arbetat fram och väljer att spela med får, utifrån de slutsatser man drar, följande likformiga utseende:




*Två handlingar*

I två av de övriga tre grupperna, grupp B och D, så överensstämmer i stort deras diskussioner med vad som återgivits ovan av Peter och Sabinas första omgång. Den fjärde gruppen, grupp A, hamnar i en diskussion i vilken de fokuserar situationella och kulturella aspekter av relationen tärningar och spelbord. I avsikt att skapa mening i situationen och det material de blivit tilldelade så differentieras strukturella egenskaper bort, som exempelvis vilka summor som är möjliga med tärningarna i fråga. Det som prioriteras är i stället spelbordets utformning. Den kontextualisering gruppen gör mynnar ut i det faktum att man placerar alla marker på omöjliga händelser enligt:




I de tre andra gruppernas kontextualiseringar finner vi mer likartade uppläggsstrategier. De kontextualiserar spelsituationen så att det handlar om att lösa de båda problemen att (1) begränsa summornas utfallsrum $\Omega_S$ och att (2) fördela ett givet antal marker inom detta utfallsrum. Detta är en övergripande differentiering av situationen som jag, med stöd i den matematiska ansatsen, haft anledning att hoppas på med den design jag utformat. I linje med designen, och i termer av differentiering, så prioriterar också grupperna handlingen att finna ett godtagbart utfallsrum högst, under den första spelomgången. Med avseende på (1) så exemplifierar utdraget ovan att dessa grupper haft klart för sig att avgörande för detta är att hitta möjligt respektive omöjligt utfall och att alla utfall, dvs. alla nummer som utgör spelbordet, inte är möjliga.

Utifrån denna föreställning så lägger två av de tre grupperna, grupp C och D, på alla de utfall som med tärningarna i fråga är möjliga – summorna 2, 3 och 4 – medan den tredje gruppen, grupp B, väljer att inte lägga på trean. I grupp B:s diskussioner framkommer inget som tyder på att detta är ett medvetet val. Istället finner jag det rimligt att de kontextualiserat möjliga summor som en fråga om att summera endast 1+1 och 2+2 och därmed inte haft summan tre tillgänglig för sina slutsatser. Antar vi att så vore fallet för grupp B så kan vi uppfatta de tre gruppernas agerande som att de i sin situationella kontextualisering differentierat de i situationen aktuella tärningarna från vanligt utformade ett till sex tärningar. Till skillnad från den slutsats jag drog av agerandet i grupp A så placerar alltså de andra tre grupperna spelet och tärningarna i den aktuella situationen, i den situationella kontexten. Deltagarna kopplar denna insikt utan kommentar till relationen mellan enskilda tärningarnas design och betydelsen av denna, för möjligt respektive omöjligt utfall, beträffande summan av två tärningsslag. Denna föreställning om möjliga summor i relation till uppfattad tärningsdesign kan sägas vara oberoende av situation. Detta skulle innebära att om eleverna bara kontextualiserar tärningarna relevant, i den situationella kontexten, så finns en inre förutsättning för dem att skilja mellan möjligt/omöjligt utfall, vilket placerar föreställningen i relation till den begreppsliga kontexten. Den praktiska syllogismen för grupperna B, C och D kan därför, med avseende på $\Omega_S$, konstrueras som:

P1 För att kunna vinna i spelet så önskar eleverna finna utfallsrummets begränsningar i termer av möjligt respektive omöjligt utfall.

$P2_{begr.}$ Detta kopplar eleverna till relationen mellan kontextualiserade tärningsstrukturer och möjliga tärningssummor.

$P2_{sit.}$ För detta tror de sig behöva differentiera aktuella speltärningar från den typ av ”vanliga” tärningar de stött på i vardagliga situationer.

S Därför differentierar eleverna tärningarna i situationen från vanliga och kopplar aktuell design till möjligt respektive omöjligt utfall.

Jag vill emellertid poängtera att uppdelningen av P2 inte skall läsas som en hierarkisk statisk uppdelning, utan endast som analytiskt motiverad.

Går vi nu över och undersöker dessa tre gruppers agerande vad gäller (2), fördelningen av ett givet antal marker inom identifierat utfallsrum $\Omega_S$, så såg vi i a priori analysen att vi fick ett tillfredställande resultat, med avseende på den klassiska sannolikhetsdefinitionen, om vi utgick ifrån utfallsrummet med avseende på alla ordnade par mellan $X_1$ och $X_2$. Det vi kan anta är att eleverna i någon mening har utfallsrummen för $X_1$ och $X_2$ till förfogande, då de hittat $\Omega_s$. Men då alla tre grupperna fördelat sina marker likformigt, och diskussionerna inte antyder något annat, så finner vi inget stöd för att de skulle ha utfallsrummet för slumpvariabeln $(X_1, X_2)$ tillgängligt som begreppslig determinant. De skiljer inte på utfallen (1, 2) och (2, 1). Den likformiga ansatsen såg vi att också grupp A antog, även om de inte hade utfallsrummet $\Omega_S$ klart för sig. Men, i ett försök att skapa en så samlad bild som möjligt av vad som ligger till grund för den likformiga responsen så väljer jag att endast basera denna del av analysen på de tre andra grupperna.

Kopplat till de utfall de identifierat placerar Grupp C och D således ut åtta marker vardera på händelserna att få summan två, tre respektive fyra. På motsvarande sätt fördelar grupp B tolv marker på de båda händelserna två och fyra.

Den kontextualisering som ligger till grund för denna respons är inte alldeles enkel att reda ut då elevernas diskussioner är väldigt begränsade med avseende på framförallt reflekterande processer. I termer av Lecoutre (1992) så skulle det likformiga upplägget, dvs. *equiprobability*, svara mot en respons som grundar sig på föreställningen att allt bara är en fråga om chans. Pratt (2000) som också identifierat *equiprobability* i sina studier härleder denna missuppfattning till elevers lokala resurser som exempelvis *fairness* eller *unsteerability*. Dessa båda resurser skulle för min studie innebära att deltagarna kontextualiserar fördelningen av marker som en fråga om de enskilda tärningarnas symmetriska utseende eller huruvida de kan utöva fysisk kontroll över dem, varför det likformiga upplägget skulle bli rimligt i förhållande till detta. Men frågan är om de kontextualiserar upplägget till att endast gälla de enskilda tärningarnas utseende, eller huruvida de kan utöva fysisk kontroll av dem. Jag skulle vilja påstå att där finns andra, konkurrerande determinanter, som stimulerar elevernas kontextualiseringar. I utdraget ovan inleder Sabina resonemanget om markernas fördelning med:

- *…lika många på varje, det finns?…Hur många blir det på varje?* undrar hon. *Tjugofyra delat på tre…åtta blir det eller?*

I en av de andra grupperna, grupp D, ser vi prov på en liknande ingång till markernas fördelning. Efter att Lars och Petra identifierat möjliga utfall går Petra vidare med:

- *Å vi ska ha 24…**åtta** blir det ju på varje.* Hon går sedan vidare med att förklara detta för sin kamrat med:
- *Om vi har åtta på varje så blir det tre gånger åtta, är tjugofyra.*

Det som Sabina inleder med skulle kunna förklaras med att hon har en intuitiv uppfattning om att *allt* bara är en fråga om chans. Ursprunget till en sådan uppfattning vore troligen kopplad till den kulturella kontexten, dvs. härledd från vardagliga erfarenheter. Men som fortsättningen av resonemanget visar så är hon inte särskilt stabil i sin övertygelse. Det hon avslutar med, och som förstärks av Petras utsaga, är att hon problematiserar fördelningens utseende på så sätt att hon prioriterar relationen mellan antal möjliga händelser och antalet marker i fråga. Varken strukturella eller fysiska egenskaper, med avseende på tärningsdesign och kontroll, ges någon högre prioritet i deras kontextualiseringsprocess. Eleverna kopplar i någon mening utfallsrum till sannolikhet, men som argumenterades för ovan så är den begreppsliga determinanten, i termer av ordnade par, inte tillgänglig för eleverna. Detta står i relation till den situationella kontexten. Eleverna går inte vidare med att utveckla sina inledande diskussioner, om möjligt och omöjligt utfall, vilket medför att de lutar sina bedömningar mot utfallsrummet $\Omega_S = \{2, 3, 4\}$. Elevernas agerande kan också sägas vara stimulerat av de normer, värderingar och förväntningar som råder inom ramen för en matematiklektion. Eleverna finner en lösning på problemet genom att använda verktyg som de anser vara relevanta i undervisningskulturen; nämligen talen som ingår i uppgiften – talen 3, 8 och 24 – och räknesätten division eller multiplikation (jmf. Säljö, 1991). Med avseende på detta skulle den praktiska syllogismens beträffande markernas fördelning kunna konstrueras som:

| | |
|---|---|
| P1 | Eleverna önskar finna en lösning på problemet att finna en ”vinnande” fördelning av ett givet antal marker inom identifierat utfallsrum. |
| $P2_{begr.}$ | För detta anser de att de måste ta relationen mellan utfallsrum och chans i anspråk. |
| $P2_{sit.}$ | Lutar sina bedömningar på utfallsrummet $\Omega_S = \{2, 3, 4\}$. |
| $P2_{kul.}$ | Värderar de normer som gäller för agerande under en matematiklektion. |
| S | Sålunda, eleverna delar antalet marker med antalet identifierade utfall, vilket leder till ett likformigt resultat. |

Jag vill dock poängtera att denna tolkning stöds av en allt för begränsad mängd empirisk information från elevernas diskussioner.

*Återkoppling av första omgången*
Innan eleverna blev tilldelade en ny omgång tärningar gavs de i uppgift att fundera över det spel de nyss spelat. Frågan var ställd så att de skulle ge respons på om de skulle ändra sin strategi i en ny spelomgång med samma tärningar, och om så vore fallet, varför skulle de ändra? Peter och Sabina mötte grupp B, Mats och Jenny, vilka ”missade” att placera ut marker på trean. Därför vinner Peter och Sabina och styrkta av segern finner de ingen anledning att ändra sin tidigare strategi:

- *Likadant igen,* säger Sabina.
- *Ja det var ju bra,* instämmer Peter.

I det andra mötet, mellan grupperna A och D, insåg de båda gruppernas deltagare nästan omedelbart det omöjliga för grupp A att vinna. Efter att lagen endast kastat tärningarna ett fåtal gånger så upptäcker båda grupperna att grupp A placerat alla sina marker på omöjliga händelser. På frågan hur de, grupp A, skulle lägga ut marker om de skulle spela en gång till svarar därför Louise:

- *Jamen då skulle vi ha tagit två, tre och fyra.*

Efter detta tillfälle till eftertanke så tilldelades eleverna den röda uppsättningen tärningar.

### Omgång 2 – röda uppsättningen

Tärningarna i omgång två var designade enligt (222 444) och (333 555).

Efter en kort återkoppling på första spelomgången tilldelades grupperna en ny uppsättning tärningar, den röda uppsättningen. Peter och Sabina inleder diskussionen på ett liknande sätt som vid den första, med att försöka identifiera utfallsrummet för summorna. Nu är inte tärningarna lika varandra i utförande och de börjar med att titta på en tärning i taget:

- *Hur högt är det?* inleder Sabina.
- *Det är fem, från två till fem,* svarar Peter.
- *Å på denna är det tre till fem,* säger Sabina och fortsätter på ett summerande sätt; *På denna är det tre till fem och denna är det fyra till två.*

När hon fått klart för sig hur tärningarna ser ut fortsätter diskussionen med att kartlägga utfallsrummet under tiden som man hör att de provslår tärningarna:

- *Det högsta det kan bli,* inleder Sabina.
- *…det är ju…fem,* säger Peter
- *Nä. Alltså med båda tärningarna,* förtydligar hon.
- *Jaha, nio,* ändrar sig Peter. *Nio är det högsta,.*
- *Och lägsta?* fortsätter Sabina. *Lägsta… fem,* svarar hon själv. *Nio till fem eller fem till nio?*
- *Ja,* instämmer Peter.

Vi ser av utdraget att Peter försöker delta i diskussionen på ett tydligare sätt nu än i diskussionen under första omgången. Men det är fortfarande Sabina som driver resonemanget framåt och summerar vad de kommit fram till. Övertygad som hon är om att markerna skall fördelas likformigt över summornas utfallsrum så inleder hon arbetet mot detta med:

- *Lika många på varje då?*
- *Ja det kan vi ha,* håller Peter med om.

Men då inte antalet marker dividerat med antalet funna utfall går jämt upp så infinner sig följande diskussion:

- *24 stycken,* säger Sabina och stannar upp. Hon går sedan vidare med: *24 delat på fem, det går inte!*
- *Gör det inte?* Undrar Peter.
- *Nä. Vi får sätta en mer på någon.*
- *Okej, inte på nian,* invänder Peter. *På femman då blir det sex.*
- *Va?* säger Sabina.
- *Du sa en mer på en*.
- *Nä det ska det inte va,* rättar sig Sabina. *Det ska vara mellan femman och nian, för det blir mellan fem och nio.*

Det sista uttalandet från Sabina ligger inte alls i linje med den övriga diskussionen utan är relaterat till hur summorna blivit identifierade. Syftet med uttalandet kan dock ses som att hon önskar förtydliga för Peter varför det är en mindre och inte en mer marker som skall placeras.

- *Men hur många ska det va på varje?* fortsätter hon. *Då måste vi ju…24 delat på fem, men det går ju inte jämt upp så då blir det bara fyra på en i stället. Det går inte jämnt.*
- *Tjugofyra sa du va?*
- *Ja,* bekräftar Sabina
- *Tjugofyra delat på fem,* börjar Peter. *Det blir 4.8.*

Detta räknar han ut direkt, utan tillgång till räknare. Sabina håller med honom, men ser samtidigt det otillräckliga i lösningen:

- *Ja vet,* säger hon. *Men du kan inte sätta en åttondel.*

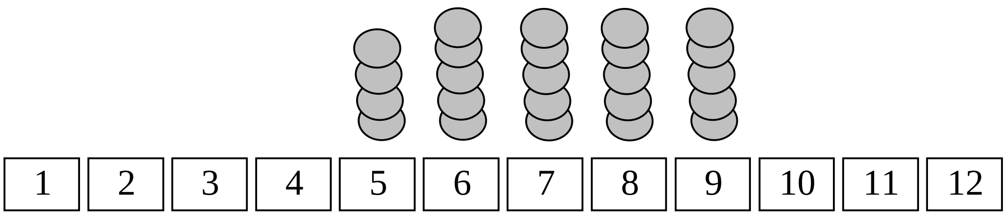
Peter håller med henne om detta men resten av resonemanget verkar han dock ha svårt att följa.

- *…då blir det bara fyra där*, fortsätter Sabina.
- *Tjugofyra delat på tre då?* föreslår Peter.

Även om det sista uttalandet Peter gör på ett bättre sätt skulle ligga i linje med ett korrekt identifierat utfallsrum så ser jag ingen tendens till att han skulle grunda sitt resonemang på detta. Mer troligt är det att han erinrar sig förra omgångens lösning och försöker applicera den även här, utan någon direkt anledning.

- *Jamen det ska vi inte ha,* replikerar Sabina på detta.
- *Det blir åtta.*
- *Jamen det ska vi inte ta ändå,* vidhåller hon och börjar rita in satsningar på pappret: *Tjugo, ska vi sätta in fyra till? vem ska vi inte ha fyra på…eller vem ska vi ha fyra på?* frågor hon avslutningsvis.

Eventuellt så upplever de sig lite jäktade ty resonemanget stannar av och Sabina avslutar diskussionen med att sätta ut de fyra kvarvarande markerna varför upplägget fick följande utseende:




*Lägsta och högsta värde*

Under denna omgång kan gruppernas diskussioner sägas vara uppdelade i två fall, två kontextualiseringar av möjligt och omöjligt utfall. Den ena står i relation till den praktiska syllogism som redovisades med avseende på denna handling under förra avsnittet. Utifrån detta identifierade två av grupperna, grupp B och D, de möjliga utfallen fem, sju och nio. I det andra fallet, i vilket Sabinas och Peters agerande ingår tillsammans med grupp A, så mynnar dessa gruppers kontextualiseringar ut i ett upplägg där de även inkluderar sexan och åttan. Även om vi inte identifierar någon mer ingående och förfinad systematisering ser vi av Sabinas inledande resonemang att hon som tidigare uppfattar summornas utfallsrum som ett problem relaterat till respektive tärnings design. Men, trots att vi även i omgång två hör av bandupptagningen att gruppen utnyttjar möjligheten att provslå tärningarna verkar hon endast tolka relationen i termer av högsta respektive lägsta värde. Vi ser en liknande ansats i grupp A. Med förra omgången i minnet så inleder Louise med:

- *Okej, det kommer i alla fall bli nie!*
- *Jaja,* svarar Tom, *och så kan det som minst bli tre plus två…fem. Då tar vi två till fem då?* fortsätter han.
- *Det kan ju som mest bli nie,* rättar Louise.

- *Ja just det, från fem till nie menar jag,* säger Tom.

De slutsatser vi kan dra kring detta är att eleverna, i samtliga grupper, nu insett att aktuella tärningar är skilda från den typen av tärningar de mött i vanliga sällskapsspel, som exempelvis yatzy och fia. Den skillnad vi ser är därför en fråga i relation till andra determinanter. I de två grupper som inkluderar även omöjliga utfall i sin modell, dvs. kontextualiserar uppgiften som en fråga om lägsta respektive högsta möjliga utfall, så implicerar detta att de har en bild av kontinuitet i utfallsrummet mellan dessa båda gränser. Ett alternativ till, eller som stöd för, ett kontinuitetstänkande kan determinanter i den undervisningskulturella kontexten sägas utgöra. Med detta menar jag, i anslutning till det didaktiska kontraktet (Brousseau, 1997), att eleverna inte förväntar sig att det skall ligga ytterligare problem bakom det de redan hittat. Den kontextualisering de gjort anser eleverna vara den som ”läraren” hade intentionen att få dem att upptäcka. Detta skulle innebära att det inte är kontinuitetsaspekten i sig som differentierats ut, utan att den är en konsekvens av den kontextualisering som gjorts. Dessa båda gruppers agerande, beträffande summornas utfallsrum, skulle därför kunna illustreras med den praktiska syllogismen:

| | |
|---|---|
| P1 | Elevernas mål är att skilja ut tärningssummornas möjliga utfall från de omöjliga. |
| $P2_{sit.}$ | Ställer inte någon ingående systematisk kartläggning till förfogande för sina strategival. |
| $P2_{begr.}$ | Uppfattar det som att det gäller att, utifrån aktuella tärningar, identifiera lägsta respektive högsta möjliga värde. |
| $P2_{kul.}$ | Eleverna uppfattar det som att de identifierat den huvudsakliga intention som varit implicerad i designförändringen. |
| S | Detta leder till att eleverna, i avsikt att urskilja omöjliga utfall, stannar vid att ha differentierat ut högsta respektive lägsta värde för att tillordna möjliga utfall till dessa och summor dem emellan. |

När grupperna sedermera kommer fram till markernas fördelning ser vi exempelvis av utdraget ovan att resonemang kring detta inte heller här bottnar i några mer ingående strukturella överväganden. Beroende på det utfallsrum grupperna identifierat för summorna så önskar därför eleverna, i likhet med första omgången, att uppnå en så god likformig fördelning som möjligt. Grupp B och D som avgränsat summornas utfallsrum som $\Omega_S = \{5, 7, 9\}$ hamnar därför i samma diskussion som vid första omgången. Tilläggas kan att jag inte i någon av de fyra gruppernas diskussioner finner att eleverna i sina kontextualiseringar skulle ta i anspråk de två distinkt skilda sätt som sju kan summeras på, dvs. som 5+2 och 4+3. Det som i designen varit implicerat för dem att upptäcka, i termer av $\Omega_{(X_1, X_2)}$, har de inte uppmärksammat, varför information om antal sätt inte stått till deras förfogande. Möjligheten finns att eleverna implicit haft tillgång till alla fyra sätt att bilda de tre summorna på, men ansett att detta inte spelar någon roll för händelsernas sannolikheter. Men då jag inte finner något som helst fog för detta i elevernas strategiarbete så argumenterar jag för att eleverna inte har uppmärksammat detta samband mellan $X_1$ och $X_2$ i sitt arbete med att ha identifierat summor som är möjliga. En rimlig förklaring till den likformiga fördelningen anser jag därför vara att elevernas respons även här skulle grunda sig i en situationell determinant, angående *systematisering*. Denna avsaknad av systematisering kan i sin tur sägas vara relaterad till det faktum att eleverna anser sig ha identifierat förra omgångens fallgrop. Som de uppfattat situationen har de upptäckt den (enda) intentionen som varit avsikten med uppgiften; att skilja möjligt från omöjligt utfall åt.

Då denna ansats fortfarande mynnar ut i *equiprobability* så väljer jag, beträffande fördelning av marker, att gå vidare med grupp A och C:s agerande, då de hamnar i en situation där de tjugofyra markerna inte kan fördelas jämt över $\Omega_{S'} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. De hamnar alltså i situationen att ett av utfallen måste ha en marker färre än de övriga. Jag ser varken i grupp A:s eller C:s resonemang att detta val skulle grunda sig på några logiska överväganden. I linje med de resultat Fischbein *et al.* (1991) iakttagit väljer Peter och Sabina, mer eller mindre intuitivt, det lägsta utfallet för detta. Men på motsatt sätt så identifierar vi i grupp A:s diskussioner och upplägg att de väljer att lägga en mindre på nian, dvs. på det högsta värdet.

- *Men kolla här*, säger Tom. *Tar man fem på varje, då blir det till…*
- *Fem gånger…fem gånger fem är 25,* bekräftar Louise.
- *Men…fyra tar vi!*
- *Fyra på en sen fem på de andra*, avslutar Louise.

Då elevernas resonemang inte grundar sig på några explicita reflekterade processer så skulle en alternativ tolkning kunna vara att eleverna har en lämplig föreställning av vad slump innebär, varför valet av utfall är grundat på denna insikt. Föreställningen är lämplig på så sätt att deltagarna inte väljer femman/nian för att det är det lägsta/högsta utfallet, och därför skulle ha lägst chans, utan för att det, i termer av oförutsägbarhet, inte spelar någon roll vilket av utfallen de väljer, utifrån den information som för dem står till förfogande. Men, på samma sätt som vi kan ana i den avslutande diskussionen ovan, så styrs båda grupperna av begränsningar i tid. Detta är en faktor i den situationella kontexten och som inte är oväsentlig i sammanhanget.

Min slutsats av de fyra gruppernas agerande beträffande fördelningens utseende anser jag i huvudsak vara relaterad till den första kontextualisering de gjorde i omgången. Med detta menar jag att elevernas (enda) kontextualisering av situationen, att uppgiften handlar om att inte hamna i fallgropen att placera på omöjliga händelser, gör att de inte finner någon anledning att undersöka situationen ytterligare.

*Återkoppling av andra omgången*

Då de båda grupperna som satsat marker på omöjlig händelse mötte var sin av de båda andra grupperna så insåg alla fyra grupperna nästan direkt vilket lag som skulle vinna. Vi ser emellertid att detta är det enda som grupperna utvärderar upplägget mot. Att fördela annat än likformigt kommer inte till uttryck. Sabina inleder grupp C:s återkopplingen med:

- *Vi skulle inte göra likadant om vi fick köra en gång till!*
- *Nä*, instämmer Peter.
- *Inga på sexan och inga på åttan,* säger Sabina. *För dom kan det inte bli.*
- *Ja.*
- *Då blir det tre igen, då blir det åtta på varje,* avslutar Sabina.

### Omgång 3 – blå uppsättningen

Tärningarna i omgång tre var designade enligt (1111 22) och (1111 22).

Min förhoppning med den tredje designen var att ytterligare få elever att kontextualisera aspekter av sannolikhet i termer av antal sätt och proportionalitet. De determinanter som var implicerade för att stimulera detta var i huvudsak situationella, relaterade till likheter och skillnader mellan aktuellt tärningspar och första omgångens tärningar.

Sabina inleder gruppens diskussion över tredje uppsättningen tärningar med:

- *Det blir etta och tvåa, det kan bli.* Och efter att Peter bara kort givit sitt instämmande fortsätter hon med:
- *Det blir dubbelt så stor…att det kan bli två som att det kan bli…*
- *Fyra,* avslutar Peter meningen.
- *Ska vi ta två istället,* fortsätter Sabina. *Vi tar rätt många på två.*
- *Ja, och knappt inga på…*
- *… fyran,* avslutar hon.

Efter detta börjar Peter lite trevande leda in diskussionen mot trean, vilket Sabina besvarar med frågan:

- *Ska vi skriva mer på trean än på fyran?*
- *Jamen, alltså hm…det ska ju vara mer där än på den.*

Vad Peter menar med det sista uttalandet får vi ingen förklaring till. Gruppen går inte vidare i diskussionen. Under tiden som Sabina har börjat rita in deras fördelning kommer observatören in och frågar:

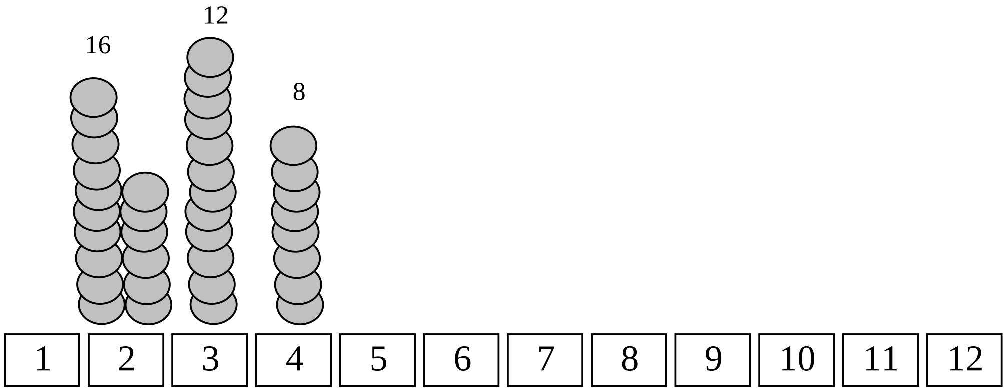
- *Ni har kollat på alla sidorna på tärningarna va?*
- *Ja,* svarar båda.
- *Det är mest ettor,* fortsätter Peter.

Då observatörerna uppmärksammat att andra grupper inte tagit till sig tärningsdesignen på det förväntade sättet så görs här ett allmänt inlägg i situationen, där man ber eleverna att uppmärksamma huruvida dessa tärningar skiljer sig från de gula.

I detta spel har eleverna nu 36 marker att fördela, och efter Sabina ritat ut 24 av dem infinner sig ett för bandupptagning svårtolkat resonemang.

- *Då har vi 12 stycken kvar,* säger Sabina. *Ska vi ha tolv stycken på den då?*
- *Nä det skulle vara mer där ju,* invänder Peter.
- *Det är alla fall mest på den,* avslutar Sabina.

Även om vi inte kan uppfatta några direkta preciseringar i deras diskussion här så får vi en ganska klar bild av vad de syftat på genom att titta på deras slutliga dokumentation av upplägget.




*Nummermodell*

Vi ser i diskussionen ovan att gruppen här inte prioriterar summornas utfallsrum i någon högre grad. Som poängterade så ligger detta i linje med vad vi hade förväntat oss. Men, detta agerande finner vi bara i ytterligare en grupp, grupp B. I de två andra grupperna gavs distinktionen mellan möjligt respektive omöjligt utfall fortfarande högsta prioritet i modellbyggandet. Båda dessa grupper uppfattar strategival som en fråga om att endast utesluta omöjliga händelser. Detta är inget som jag kan se att grupp B och C skulle förringa i sin modell, men dessa båda löser detta på ett mer underförstått sätt. För framförallt grupp A så är givetvis de båda föregående omgångarna ytterst determinerande, då de förlorat båda spelen i och med att de satsat på omöjliga händelser. De vill av förståeliga skäl inte hamna i en sådan situation igen varför detta tar all deras uppmärksamhet. I grupp A:s och D:s diskussioner framstår det som om de varken uppmärksammat likheter eller skillnader jämfört med första uppsättningen tärningar. Rimligt vore därför att anta att de lutar sina bedömningar mot de aktuella slumpvariablerna $X_1$ och $X_2$, på så sätt att de med stöd i antal ögon sätter samman summor, utan att ta vare sig tärningarnas ordning eller övrig design i anspråk. De två andra grupperna uppfattar av egen kraft de enskilda tärningarnas design, beträffande det antal sidor på vilka respektive ögontal är representerade, och att detta bör inverka på hur de skall satsa. Som vi ser av ovan så uppmärksammade också observatörerna dessa båda riktningar. Då de, i den direkta situationen, uppfattar det som att den implicerade informationen inte står alla grupper till förfogande så väljer de att få samtliga elever att uppmärksamma denna. Vi har sett i de båda föregående omgångarna att *equiprobability* har aktualiserats, och jag har också i termer av kontextualisering argumenterat för varför. Syftet med att delge information i anslutning till skillnader och likheter mellan blå och gula tärningar var att undersöka hur eleverna kontextualiserar den situationella determinanten, och vidare hur en sådan kontextualisering kan sägas stimulera aspekter av sannolikhet.

Den handling jag väljer att gå vidare med att beskriva har därför sin utgångspunkt i det faktum att alla elever har de enskilda tärningarnas design klar för sig, och hur denna design förhåller sig till designen av de gula tärningarna. Vi kan alltså utgå ifrån att de har möjlighet att arbeta med en tärningsmodell där antal ögon står i relation till antal sidor i linje med modellen:

$$\Omega_{T_1} = \{1_a, 1_b, 1_c, 1_d, 2_e, 2_f\}$$
$$\Omega_{T_2} = \{1_g, 1_h, 1_i, 1_j, 2_k, 2_l\}.$$

Beträffande denna handling så placerar två av övriga tre grupper sina marker i linje med Peter och Sabina. Alla fyra grupperna gick emellertid ifrån *equiprobability* men i en av grupperna, grupp D, placerade man inte markerna efter samma princip som de tre övriga. I grupp A, B och C tar sig strategierna uttryck i form av proportionalitetstänkande, med avseende på enskilda tärningars design. Men, då grupp D placerar flest marker på trean och minst på tvåan så ser jag inte att detta skulle grunda sig i något liknande resonemang. Vad som stimulerat ett sådant upplägg är svårt att dra några slutsatser om. En rimlig förklaring kan vara att de uppfattar observatörernas inlägg som att de måste hitta på något och då de inte kan utveckla detta vidare får valet av upplägg en mer eller mindre slumpmässig karaktär. Jag kommer därför att fortsättningsvis fokusera de tre övriga gruppernas agerande, i syfte att beskriva den aktuella handlingen.

Som redan poängterats så har de tre återstående grupperna differentierat ut de enskilda tärningarnas design och kontextualiserat dessa i termer av proportionalitet gentemot händelserna att få summan två, tre och fyra. Uttryckt i termer av Lecoutre (1992) så skulle detta agerande tillskrivas den tankemodell som hon kallar för nummermodell. I termer av Pratt (2000) så skulle detta implicera någon form av strukturell *fairness*. Oavsett benämning ser jag elevernas agerande som att de uppfattar situationen som en fråga om att spegla enskilda tärningars design i designen över summorna. I grupp C kommer detta till uttryck i föreställningen om att dubbelt så många ettor som tvåor, på de enskilda tärningarna, genererar dubbelt så många tvåor som fyror, beträffande summorna. Lika tydlig blir inte denna relation i de båda andra grupperna. Även om det går att se nummermodellen som determinerande också här så placerar grupp A; 11:a marker på tvåan, 8:a på trean och 5 på fyran och grupp B; 20 marker på tvåan och 8 marker var på trean och fyran respektive.

Det som Peter och Sabina tyvärr låter gå oreflekterat förbi är hur de gör rimligt antalet marker på summan tre. Deras upplägg implicerar någon form av intuitiv föreställning av ett linjärt samband mellan summorna; de åtta ögontalen ettor genererar 16 marker och de fyra ögontalen tvåor på motsvarande sätt 8 marker varför, om vi bortser från ordningen, de sex ögontalen ettor och tvåor borde generera 12 marker. Det finns emellertid inget i deras diskussioner som tyder på att de skulle ha en sådan modell explicit tillgänglig i sitt agerande. Mer troligt är att, efter att de fördelat efter principen dubbelt så många marker på två som på fyra så har de tolv marker kvar vilka man lägger på trean.

Den praktiska syllogism jag väljer att konstruera med avseende på ovan diskuterade nummermodell blir därför:

| | |
|---|---|
| P1 | Eleverna uppfattar situationen som att deras strategier bör spegla de enskilda tärningarnas design. |
| $P2_{sit.}$ | Eleverna uppfattar den skeva designen och, i anslutning till detta, skillnader och likheter i förhållande till det blå tärningsparet. |
| $P2_{begr.}$ | Eleverna ställer tärningsdesignen i relation till ett proportionalitetstänkande. |
| S | Sålunda, eleverna ger $\Omega_S$ låg prioritet till förmån för strategier som fokuserar aspekter av markernas fördelning i termer av proportionalitet. |

*Återkoppling av tredje omgången*

I elevernas frekvenstabeller visas för alla fyra grupperna tydligt att summan fyra är den summa som kommit upp minst antal gånger. Beträffande summorna två och tre så speglar också dessa avprickningar den likhet i sannolikhet som råder mellan dessa båda, med avseende på antal gynnsamma fall. Patrik och Sabina har dokumenterat att tvåan kom upp 17 gånger, trean 12 gånger och fyran 5 gånger. Utifrån detta inleder Peter diskussionen med:

- *Vi borde satt mer på…*
- *Tvåorna,* bryter Sabina in med. *Och mindre på fyra.*
- *Och treorna skulle vi också satt lite mer på,* fortsätter Peter.
- *Vi kunde satt några extra på tvåan och trean typ,* håller Sabina med om. *Vi behövde ju mindre på fyra.*

## Omgång 4 – Vita uppsättningen

Tärningarna i omgång fyra var designade enligt (2222 44) och (3333 55).

Grupp C:s ansats i denna omgång liknar den som de inledde omgång 3 med. Man väljer att inspektera var sin tärning och går direkt in på att identifiera tärningarnas utformning:

- *Två och fyra,* inleder Peter
- *Treor och femmor,* kompletterar Sabina, utifrån den tärning hon inspekterar.
- *Två tvåor, nä tre tvåor…nä fyra tvåor,* inser till slut Peter.
- *Fyra tvåor! Här är det fyra treor,* summerar Sabina.

Detta förhållningssätt till situationen har gruppen antagit redan innan observatören gör ett allmänt inlägg om att grupperna ska titta på tärningarna ordentligt. Efter att ha fokuserat de aktuella tärningarnas utformning slås nu gruppen av något de känner igen och som ställde till det för dem tidigare. Sabina uttrycker detta med frågan:

- *Vänta, nä vänta, vilka var det?*
- *Dom var ju samma,* säger Peter.
- *Domma bara,* Sabina kopplar tärningarna till de röda. *Nu är det fler treor och fler tvåor. Alltså kan det inte bli…?*
- *Nu satsar vi mest på tvåor.*
- *Tvåor kan det inte bli, det minsta det kan bli är fem,* klargör Sabina. *Och det högsta som kan bli är nio. Sex och åtta kan det* ***inte*** *bli för det lärde vi oss förra gången.*

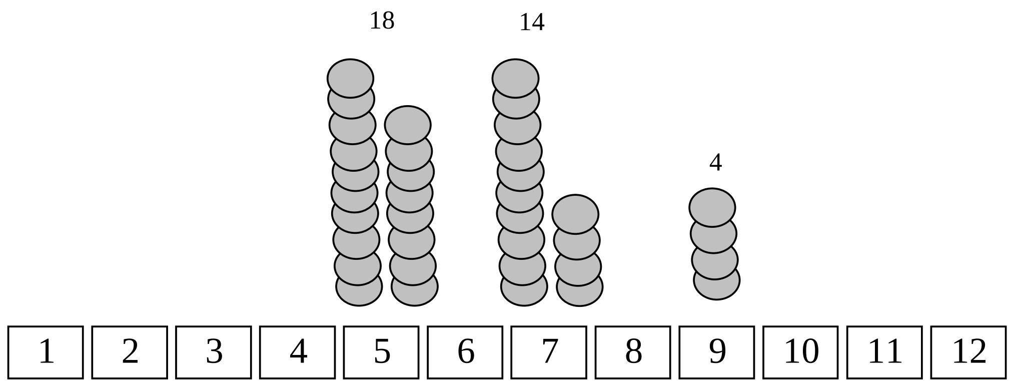
Peter ger endast ett hummande ljud till svar på Sabina sista uttalande varför vi inte får någon klarhet i om han förstår vad det är hon menar. Efter att ha fått klart för sig möjligt respektive omöjligt utfall så fortsätter Sabina med att fördela marker.

- *Ska det bli mer på eller mindre?* frågar hon. *Det borde bli mest på fem…bör det bli allra mest på. Eftersom det är mest treor och tvåor bör det bli mest fem.*
- *Ja, okej,* säger Peter.

Sabina som börjar att rita in gruppens satsningar korrigerar dessa tills upplägget blir som hon önskar.

- *…16, 17, 18 på femman typ. Och typ…14 på den och fyra på den.* Efter att Peter ställt sig frågande till proportionerna avslutar hon med;*…eftersom det verkar bli minst nie eftersom det är minst höga.*
- *Ja okej, det ser bra ut. Okej då kör vi,* avslutar Peter.

Den strategi som följer av resonemanget blir:




*Avgränsning i ytterligheter*
Något vi sett som genomsyrar hela undersökningen, och som inte heller här blir undantaget, är elevernas begränsade förhållningssätt till systematisering. Vad vi emellertid kan uppmärksamma av utdraget ovan är att eleverna i den fjärde omgången blir något mer försiktiga i sitt arbete. I grupp C:s inledande resonemang så differentierar man på samma sätt som i föregående omgångs inledning, dvs. summornas utfallsrum ges låg prioritet till förmån för enskilda tärningars design och antalet lika sidor. Men, då man efter ett tag identifierar likheter med den röda uppsättningens design så erinrar sig Sabina ett tidigare misstag gruppen gjort: *Sex och åtta kan det* ***inte*** *bli för det*

*lärde vi oss förra gången*. Detta leder till att de stannar upp och reflekterar över möjliga utfall, i syfte att undvika att hamna i samma situation igen. Upptäckten att lag förlorat beroende på att man lagt på omöjliga händelser har på liknande sätt inte gått något lag obemärkt förbi. Denna determinerande aspekt kan därför sägas ligga till grund för ett i allmänhet mer försiktigt och reflekterande förhållningssätt i situationen, vilket leder till att inget av lagen placerar marker på omöjliga händelser i sista omgången.

Med avseende på prioritering och differentiering så kan emellertid elevernas huvudsakliga problematisering i situationen sägas vara riktad mot enskilda tärningars design och fördelning av marker. Tyvärr så verkar inte arbetet med möjligt/omöjligt utfall bidra till att eleverna går vidare med någon mer ingående analys vad gäller aspekter av chans. I linje med detta identifierar jag exempelvis inte i någon av gruppernas strategiarbete att de ställer till förfogande de två distinkt olika sätten att erhålla summan sju. Istället finner jag att samtliga gruppers resonemang mer eller mindre står i paritet med de diskussioner som grupperna förde i föregående omgång. Man uppfattar relationen mellan enskilda tärningar och sannolikhet för summorna som ett problem relaterat till den s.k. nummermodellen. Beträffande detta ligger, på motsvarande sätt som i den föregående omgången, grupperna A, B och C i linje med varandra. Grupp D verkar hålla fast vid att det är det mittersta utfallet, här summan sju, som har störst chans. Gruppen skiljer sig också i upplägg från övriga genom att tilldela femman lägst chans, i termer av minst antal placerade marker.

I avsikt att ytterligare försöka bringa ordning i elevernas kontextualiseringar, med avseende på nummermodellen, väljer jag därför att titta närmare på de tre grupperna som överensstämmer i upplägg. Det sätt på vilket de överensstämmer syftar på deras val att placera flest antal marker på femman och det minsta antalet på nian. Proportionerna av antal marker på summorna skiljer sig emellertid åt mellan grupperna.

Om vi återgår till utdraget ovan ser vi att Sabina utgår från femman, då hon skall börja placera marker. Först väljer hon ut, utan att egentligen ställa detta i relation till något annat, hur många marker som skall lägga på femman, vilken uppfattas ha störst chans. Detta är ett fenomen som vi ser blir aktualiserat även i de två andra grupperna. I grupp A tar detta sig uttryck som:

- *Många femmor ska vi ha,* säger Tom. *…kolla här,* fortsätter han, *jag har fyra tvåor…*
- *Ja just det.*
- *…och du har fyra treor,* avslutar han.

I grupp B driver Mats diskussionen i stort sett med sig själv och inleder arbetet med att placera ut markerna med att uppmärksamma utfallsrummet för slumpvariablerna $T_1$ och $T_2$, för respektive tärning:

- *Fyra treor, två femmor, två fyror, fyra tvåor.* Med denna information tillgänglig så formar han sedan $\Omega_S$, samtidigt som han nästan omedelbart går över till att fokusera markernas fördelning inom $\Omega_S$: *sju, nio och….fem. Fem, sju, nio.*
- *mm*, svarar Jenny.

Mats går sedan vidare med något som inledningsvis blir otydligt men som sedan understryker det som visat sig i de tidigare grupperna beträffande fokus på summan fem:

- *…treor och tvåor och…öh fem. Vi måste ha* ***mest*** *på fem!*

Efter att ha konstaterat att summan fem är den summa som har störst sannolikhet vid kast med dessa två tärningar ser vi av gruppernas diskussioner att motsvarande resonemang följer med avseende på nian: *…eftersom det verkar bli minst nio eftersom det är minst höga*, uttalar Sabina då hon skall motivera gruppens satsningar. På motsvarande sätt följer, av det resonemang som Mats tidigare fört, en liknande kontextualisering i grupp B:

- *Okej, vi måste ha mest på femman*, svarar Jenny, på det Mats sagt. Hon ställer sedan frågan: *Hur många ska vi ha på varje?*
- *Ja, vi ska lägga mest på fem,* svarar han.
- *Mm, men hur många?*
- *Ja, eeh, nian ska vi ha minst på i alla fall,* fortsätter Mats.

Vi ser i båda grupperna att man stannar vid olika typer av konstateranden. Men, även om vi inte kan finna några uttalade kombinatoriska resonemang bland eleverna så finns det anledning att tro att de lutar sig mot en förställning där de beaktar antal sätt för en summa, utifrån det antal sidor som ett ögontal är representerade på. Någon form av naiv kombinatorik menar jag finns tillgänglig, utifrån det sätt på vilket de kopplar respektive tärningsdesign till varandra.

I linje med detta så framgår det tydligt i elevernas strategiarbeten att de verkar problematisera uppgiften i termer av ytterligheter. Vad vi ser är att eleverna fokuserar summorna fem och nio. En tolkning av elevernas agerande står i relation till det vi identifierade i omgång två då grupperna, utifrån största och minsta värden, modellerade fram utfallsrummet $\Omega_S$. Möjligt är att de uppfattar det som enklast att finna de summor som är lägst respektive störst. På motsvarande sätt som summan sex och åtta var maskerade i omgång två så kan summan sju sägas vara svårare att kontextualisera än summorna fem och nio då de sistnämnda ligger i ytterligheter. Med utgångspunkt i en sådan kontextualisering så går de sedan vidare med att ställa dessa båda ytterligheter mot varandra med hjälp av nummermodellen. En annan tolkning är att nummermodellen i sig är det som determinerar elevernas differentieringsprocess. Man fokuserar helt enkelt de ögontal som är mest representerade, och kombinationer dem emellan. Denna tolkning innebär att eleverna inte fokuserar fem och nio för att de är ytterligheter i utfallsrummet utan för att de är ytterligheter i antal sätt, i termer av nummermodellen. Eleverna utgår i en sådan föreställning från att fem och nio har störst respektive minst chans, och kalibrerar sedan in modellen efter dessa båda. Båda dessa tolkningar av elevernas modelleringsarbete kan i någon mening sägas beskriva en differentiering i vilken man avgränsar situationen med avseende på ytterligheter. Med utgångspunkt i förra omgångens praktiska syllogism beträffande nummermodellen, så skulle elevernas agerande kunna rimliggöras ytterligare om vi i handlingsbeskrivningen också tog i anspråk elevernas sätt att kontextualisera i termer av ytterligheter.

| | |
|---|---|
| P1 | Elevernas mål är att avgränsa situationen, i relation till enskilda tärningars design och sannolikhet för summorna. |
| $P2_{sit.}$ | Eleverna uppmärksammar möjliga/omöjliga utfall och, i anslutning till detta, även den skeva fördelningen beträffande det antal sidor som respektive ögontal är representerade på. Beträffande systematisering så har eleverna inte till förfogande de två distinkt skilda sätt att kombinera summan sju på. |
| $P2_{begr.}$ | I relation till enskilda tärningars design så identifierar eleverna ytterligheter i termer av störst och minst chans. |
| S | Sålunda, eleverna uppmärksammar den skeva fördelningen och med utgångspunkt i denna så fokuseras aspekter av sannolikhet genom att de |

begränsar situationen i termer av uppfattade ytterligheter, vad gäller störst och minst chans.

Då undersökningen var begränsad i tid valde jag att inte genomföra någon återkoppling på den fjärde och sista uppsättningen tärningar. Huvudsyftet med återkopplingen var ju i huvudsak att erbjuda dem möjlighet att reflektera över de satsningar som gjorts, hur de föll ut och varför, i avsikt att stimulera diskussioner om nya tärningsuppsättningar. Då detta inte längre blev aktuellt fann jag det därför lämpligt att stå över detta moment, för att inte gå över tiden för mycket.

**Analyssammanfattning**

Studiens syfte är att förklara elevers sätt att hantera aspekter av sannolikhet genom att, i termer av differentiering, beskriva deras olika sätt att kontextualisera uppgifter som aktualiserar sådana aspekter, givet de externa och interna resurser som står till deras förfogande.

I de två första omgångarna fokuserar eleverna skillnad mellan möjligt och omöjligt utfall. Grunden för att eleverna överhuvudtaget skall kunna lyckas med att skilja mellan möjligt och omöjligt utfall ser vi är att de differentierar aktuella tärningar från vanliga. Då addition finns tillgänglig som inre resurs så gäller det bara att eleverna gör sig medvetna om vilka ögontal de skall utgå från. Men, trots att de differentierar tärningarna från vanliga så ser vi i omgång två att detta inte räcker. I anslutning till detta beskrev jag en kontextualisering i vilken elevers strategier grundade sig i en föreställning om avgränsning i ytterligheter. Beträffande denna föreställning identifierade eleverna först största och minsta summan, för att sedan modellera summornas utfallsrum utifrån dessa gränser och de tal som föll inom dem. Jag argumenterade tidigare för att detta var en konsekvens av att eleverna inte kontextualiserat situationen i någon mer ingående systematisk mening. Man har inte gjort reda för alla möjliga summor. De slutsatser jag därför drar, med stöd i de båda sista omgångarnas agerande, är att eleverna har förståelse för möjligt/omöjligt utfall, vad som krävs är att de problematiserar tärningsdesignen och att de antar ett mer systematiskt förhållningssätt i situationen.

Vad gäller fördelning av marker inom identifierat utfallsrum för summorna så uppmärksammar vi i de båda första omgångarna att elevernas agerande överensstämmer väl med vad tidigare forskning visat. För det första kontextualiserar alla grupper omgångarnas upplägg i termer av *equiprobability* (Lecoutre, 1992) och för det andra så identifierar jag ingen naturlig intuition med avseende på *ordnade par* (Fischbein *et al.*, 1991). Nu anser jag att det inte bara är ordningen mellan tärningarna som eleverna har svårt att ta till sig. I fallet med summan sju finns inget i elevdiskussionerna som tyder på att de, i sina strategier, skulle ha gjort tillgängligt de två skilda sätten 2+5 och 4+3. Den slutsats jag drar, beträffande equiprobability, är därför en annan än den som Lecoutre dragit. Hon argumenterar för att equiprobability har sin huvudsakliga grund i föreställningen att elever uppfattar ett slumpförsök som endast en fråga om chans. Men, då jag inte finner något i elevernas kontextualiseringar som stöder att de beaktat de två skilda sätten att få summan sju på finns anledning att tro att de ändå lutar sina bedömningar mot antal sätt. Det som blir determinerande i ett sådant perspektiv menar jag är att de till varje summa endast medvetandegjort ett sätt, varför alla summor anses ha lika stor chans. Vad som ytterligare stödjer en sådan slutsats är fenomenet att alla fyra grupperna frångår equiprobability i de avslutande omgångarna. Här överensstämmer elevernas agerande också med Lecoutre (1992), fast nu i termer av en nummermodell, och med vad Pratt (2000) relaterar till som *fairness*. Det resultat jag finner är att eleverna verkar ha någon form av intuitiv kombinatorisk förmåga till förfogande, av relationen mellan enskilda tärningars design och kopplingar där emellan. Detta menar jag rimliggör även elevernas tidigare agerande beträffande equiprobability, dvs. nummermodellen kan sägas ligga till grund för det likformiga upplägget i termer av strukturell fairness och naiv intuitiv kombinatorik. Den direkta slutsats man kan dra utifrån detta sätt att kontextualisera en slumpsituation i allmänhet, och händelsers sannolikhet i synnerhet, är att systematisering blir avgörande även här. För vidare kommentar på detta så hänvisar jag till avsnitt 8. 1.

Ett annat resultat som framkommit är att eleverna tydligt visat på ett ytterlighetsorienterat förhållningssätt i situationerna. I de båda första omgångarna aktualiserades detta i det sätt på vilket de differentierade fram och utgick ifrån lägsta summan fem och högsta summan 9, vid kartläggning av summornas möjliga utfall. I relation till nummermodellen kunde vi se en liknande ansats i de båda avslutande omgångarna, beträffande det antal marker eleverna skulle placera. Här fann jag att eleverna utgick ifrån de summor som hade störst respektive minst chans och kalibrerade sedan in modellen efter dessa. I de flesta grupper utgick man först från femman för att sedan gå över till att bestämma proportionerna för nian. En slutsats man kan dra utifrån elevernas sätt att differentiera i ytterligheter är att de verkar äga en intuitiv förmåga att utföra relevanta begränsningar i en situation.

Som avslutande kommentar vill jag sätta resultat i relation till det sätt på vilket eleverna kontextualiserat undervisningsrelaterade determinanter. Jag har i analyserna av elevernas sätt att kontextualisera funnit flera fenomen som visar att eleverna tenderar att ge respons i enlighet med undervisningskulturen i allmänhet och det didaktiska kontraktet i synnerhet (Brousseau, 1997). Av de resultat jag finner ser vi att den kulturella kontexten både är determinerande i en negativ och en positiv mening. Det negativa anser jag framförallt tar sig uttryck i det faktum att eleverna inte av sig själva gör någon mer ingående systematisering av möjliga och gynnsamma fall för en händelse. Om ingen ”lärare” uttrycker att eleverna förväntas agera på ett speciellt sätt, som exempelvis att teckna alla möjliga utfall, så gör man inte detta. Det sätt på vilket kontexten med tillhörande kontrakt blir stödjande kan sägas vara det omvända. Eleverna utgår ifrån att det skall finnas något att upptäcka och vi ser, i linje med Marton *et al*. (2003), att vi med situationella determinanter därför får eleverna att fokusera sådana aspekter i situationen som ur ett sannolikhetsperspektiv är relevanta.

# 8 Diskussion

I detta avslutande kapitel diskuteras först resultaten och hur de står i förhållande till de teorier och tidigare undersökningar jag utgått ifrån. Sedan kommer studiens metodologiska överväganden att diskuteras. Metoddiskussionen kommer att fokusera såväl metod för datainsamling som den intentionella analysen. Avslutningsvis ställs aspekter av studiens resultat i relation till skolundervisningen inom sannolikhetsområdet samtidigt som förslag till nya undersökningar och frågeställningar på området diskuteras.

## 8.1 Hur elever i årskurs 7 hanterar aspekter av sannolikhet

I kapitel två redogjorde jag för två forskningsområden beträffande agerande i situationer av osäkerhet. I det första, det psykologiska/kognitiva perspektivet, diskuterades hur denna tradition fokuserat mönster i tänkandet och identifiering av missuppfattningar och strategier i sådana situationer. Vad gäller det matematikdidaktiska perspektivet så belystes hur perspektivet fokuserat lärande i sannolikhet och hur instruktion kan sägas påverka en utveckling av tänkandet kring aspekter av detta. Skillnader mellan dessa båda forskningstraditioner kunde vi framförallt se i det sätt på vilket undersökningssituationer var utformade. Keeler och Steinhorst (2001) menade exempelvis att den typ av uppgifter som utnyttjats av psykologerna mäter en force-choice respons medan didaktikers uppgifter varit av mer öppen karaktär och därmed stimulerat tänkandet på ett annat sätt. Med stöd i den kartläggning som det s.k. missuppfattningsperspektivet gjort, tillsammans med matematikdidaktiska bidrag, så syftade den aktuella studien till att beskriva hur elever hanterar och tolkar uppgifter som innehåller aspekter av sannolikhet. För detta introducerades ett förståelse- och lärperspektiv som har utgått ifrån konstruktivistiska principer för lärande. Detta har inneburit att studien fokuserat elevers personliga konstruktioner av begrepp, situation och kultur i termer av processerna differentiering och kontextualisering (Caravita & Halldén, 1994; Halldén, 1999).

Utifrån detta perspektiv återgav jag tidigare hur Halldén (1999) funnit skäl att omtolka ett av Kahneman och Tverskys resultat beträffande bedömningsmetoden *representativeness*. Halldén menar att det inte alls är säkert att studenterna har bristande kunskaper i sannolikhet utan att den kontextualisering eleverna har gjort av uppgiften, det sätt på vilket de problematiserat den, inte nödvändigtvis aktualiserat den typen av kunskap. Studenterna har placerat uppgiften i den vardagliga, situationella kontexten och ger därför matematiska beslutsverktyg låg prioritet. På motsvarande sätt blir det väsentligt för eleverna i min studie att de differentierar den aktuella situationen från en vanlig sällskapsspelsituation. Aspekter av detta tar sig uttryck på olika sätt i deras agerande. I anslutning till att begränsa utfallsrummet för summorna så finner jag att det blir avgörande för eleverna att differentiera aktuella tärningar från den typ av tärningar de stött på i vanliga sällskapsspel. Denna situationella kontextualisering ser vi att alla grupper ställer till sitt förfogande efter första omgångens spel. I andra omgångens kartläggning av möjliga summor finner jag emellertid att denna kontextualisering inte blir tillräcklig. Trots att man haft tärningarnas design klar för sig så har man placerat marker på omöjliga utfall. En förklaring till detta agerande har jag beskrivit i termer av lägsta och högsta värde för summorna. Utifrån dessa gränser så tilldelade eleverna möjliga summor till de tal som föll på och mellan dessa gränser. Den fråga man som forskare kan ställa sig är; har de grupper som placerat på omöjliga händelser inte haft förståelse för denna aspekt i slumpförsöket. Vad vi finner i de båda avslutande omgångarna är emellertid att denna aspekt får en tillfredsställande lösning bara eleverna ändrar sitt förhållningssätt i situationen. I linje med Halldén ovan så är det alltså rimligare att tro att eleverna har förståelse för möjligt/omöjligt utfall, och vad som krävs för ett lämpligt agerande är att de problematiserar tärningarna rätt och att de antar ett mer ingående systematiskt förhållningssätt i situationen.

Med avseende på ett förändrat förhållningssätt antyder resultaten av analysen att de kulturella determinanterna i allmänhet blivit mindre betydelsefulla allt eftersom undersökningen fortskridit, till förmån för situationella och begreppsliga. Den situationella kontexten tenderar i ett sådant skede att få rollen av att intervenera mellan intuitivt otillfredsställande föreställningar och de i situationen begreppsligt relevanta. I min studie ser vi att detta framförallt tar sig uttryck i de erbjudanden som de konkreta tärningarna ställer till förfogande. Eleverna upptäcker såväl genom att vrida och vända på tärningarna som att testslå dem. Denna förändring i kontextualiseringsprocessen, som i ett lärperspektiv är eftersträvansvärd, uttrycker Halldén (1999) som att tyngdpunkten mellan de tre delkontexterna förskjuts. Vad som kan sägas ha stimulerat en sådan förskjutning är att uppgiftssystemet som sådant erbjudit eleverna möjlighet att jobba med små förändringar mellan samma matematiska aspekter i olika situationer. Lecoutre (1992) som, på samma sätt som Fischbein *et al.* (1991), undersökt hur elever uppfattar samma struktur i olika situationer argumenterade ju för att det kan finnas skäl till att göra situationerna än mer lika än vad hon gjort, i syfte att göra skillnader och likheter i struktur mer tillgänglig för eleverna. I linje med tyngdpunktsförskjutning från kulturella till situationella och begreppsliga kontextualiseringar, antyder mina resultat att eleverna i flera avseenden har en god förmåga att uppfatta och dra nytta av den kontinuitet som funnits implicit i designen. Denna förmåga menar jag leder till att de kan lägga mindre energi på exempelvis utfallsrummets begränsning allt eftersom situationen fortskrider, till förmån för andra prioriteringar i situationen. Men jag finner också tendenser i elevernas beteende som visar att kontinuitet mellan omgångar inte blivit uppmärksammad. Den frekvensorienterade ansatsen, som visade sig vara tydlig i min förberedande studie, fick inte alls den status som jag hade trott, i framförallt elevernas utvärderingsarbete. Jag finner två huvudsakliga orsaker till detta. I den förberedande studien, då detta förhållningssätt var tydligt, agerade eleverna över samma uppsättning tärningar vilket aktualiserade samband mellan frekvenser och strategi på ett omedelbart sätt. Nu när eleverna konfronterades med fyra olika uppsättningar ser vi att eleverna endast uppmärksammar aspekter av detta i återkopplingen. I arbete med att diskutera fram nya satsningar så beaktas inte dessa frekvenssamband. Dessutom får den frekvensorienterade ansatsen låg prioritet beroende på att eleverna i den aktuella situationen, verkar prioritera en annan kontextualisering av slumpförsök än den frekvensrelaterade. Jag kommer i följande avsnitt diskutera hur denna kontextualisering har tagit sig uttryck.

Tittar vi på de resultat som står i relation till summornas sannolikheter så finner vi flera fenomen som ligger i linje med vad tidigare studier visat. För det första placerade alla mina grupper, under de två första spelomgångarna, enligt *equiprobability*. Lecoutre (1992) som undersökt detta fenomen ingående argumenterar för att denna strategi har sitt ursprung i en föreställning om att allt endast är en fråga om chans. Även om detta kan förklaras i termer av kontextualisering, att eleverna uppfattar en situation som helt slumpmässig och därför inte finner anledning att undersöka detta vidare, så finner jag inget i mina resultat som tyder på att eleverna skulle grunda sina bedömningar på en sådan föreställning. Vad mina resultat antyder stämmer mer med vad Pratt (2000) identifierat, då han relaterar detta fenomen till den inre resursen *fairness*. Med detta menar jag att eleverna verkar hålla en uppfattning att, om varje nummer på respektive tärning är lika *fair*, dvs. har samma chans, så blir summorna *fair*, dvs. lika sannolika. Vad som stödjer en sådan förklaring av elevernas agerande är det faktum att eleverna i undersökningens båda sista omgångar frångår den likformiga fördelningen. Hade de uppfattat allt som bara styrt av chans, oavsett underliggande strukturer, så anser jag att denna differentiering inte borde uppkommit. Det sätt på vilket fairness tar sig uttryck i de båda avslutande omgångarna beskriver Lecoutre (1992) i termer av en nummermodell (eng. number model). På samma sätt som Lecoutre uppmärksammat, och som jag relaterat till som strukturell fairness och nummermodell, så önskar eleverna representera de enskilda tärningarnas design i designen över summorna. Som ett led i detta så identifierade jag även i elevernas arbete med summornas sannolikheter, en ansats mot att vilja utgå ifrån någon form av gränser. Med utgångspunkt i nummermodellen fann jag att eleverna utgick ifrån vilka summor som uppfattades ha störst respektive minst chans för att sedan kalibrera in modellen efter dessa ytterligheter. Det som inte kommer till uttryck på ett helt tillfredsställande sätt i elevernas diskussioner är på vilka ytterligare grunder denna kalibrering skulle vila. Men då de flesta grupperna placerar antalet marker på tre respektive sju, mellan de båda ytterligheterna så antyder mina resultat att denna kontextualisering implicerar någon form av naiv kombinatorik, utifrån det sätt på vilket de kopplar respektive tärningsdesign till varandra.

Angående elevernas kombinatoriska förmåga så finner jag, på motsvarande sätt som Fischbein (1975) och Fischbein *et al.* (1991), inget i undersökningen som tyder på att eleverna skulle ha tillgång till någon naturlig intuition om ordningens betydelse, mellan de enskilda tärningarnas utfall. Då detta var en respons som jag haft anledning att förvänta mig så ville jag undersöka elevers kombinatoriska kontextualiseringar i situationer som inte aktualiserade detta fenomen. I andra och fjärde omgången kunde summan sju erhållas på de båda distinkta sätten 2+5 och 4+3. Vad mina resultat emellertid visar, utifrån elevernas diskussioner, är att inte heller dessa båda sätt att sätta samman summan sju på varit tillgängliga. Detta ser jag som en konsekvens av situationella och kulturella kontextualiseringar då inget tyder på att eleverna aktivt valt bort dessa båda representationer. Med detta menar jag i huvudsak att eleverna inte antagit ett tillräckligt systematiskt förhållningssätt till situationen i syfte att bringa klarhet i alla möjliga sätt.

Utifrån dessa resultat, innehållande strukturell fairness, nummermodell tillsammans med otillräcklig systematisering, så finns det anledning att tro att eleverna, i sina bedömningar, stödjer sig på proportioner av gynnsamma fall. Den mindre lämpliga responsen skulle därmed istället grunda sig på bedömningsmetoden *availability* och, i anslutning till denna, naiv kombinatorik, dvs. elevernas respons beror av vilken information som är, eller kan göras, lättast tillgänglig (Gilovich *et al*. 2002; Shaughnessy 1992). Detta ligger också i linje med vad Keren (1984) iakttagit i relationen mellan sannolikhetsbedömningar och det utfallsrum bedömningarna grundar sig på. Att eleverna skulle luta sig mot kombinatoriska resonemang i sannolikhetsbedömningar och proportioner mellan utfall ligger också i linje med vad Piaget och Inhelder (1975) iakttagit. Även om vi i undersökningen ser att den kulturella kontexten i sig stimulerar elever att problematisera i termer av deterministiska verktyg så antyder mina resultat att eleverna visar prov på en primär intuition som ligger i linje med den klassiska sannolikhetsdefinitionen. Vad man utifrån detta resonemang därför kan hålla för troligt är att om bara alla gynnsamma fall görs tillgängliga av eleverna så verkar en intuitiv förmåga finnas, att kunna dra korrekta slutsatser om en händelses sannolikhet, utifrån den klassiska sannolikhetsdefinitionen.

## 8.2 Metoddiskussion

### 8.2.1 Metod för datainsamling

I analysen ville jag identifiera och förklara det sätt på vilket elever i årskurs sju uppfattar aspekter av sannolikhet i termer av processerna kontextualisering och differentiering, givet de interna och externa resurser som står till deras förfogande.

Genom att under ett spel- och tävlingsmoment konfrontera elever i årskurs sju med ett matematiskt innehåll som inte blivit presenterat för dem tidigare i skolan hoppades jag kunna skapa en situation som gav mig underlag till den kunskap som efterfrågades i syftet. Situationen skulle därför aktualisera föreställningar som elever har, samtidigt som den skulle ge incitament till reflektioner över matematiska aspekter av sannolikhet och dessutom vara av det slaget att den kunde tänkas aktualisera en variation av föreställningar hos eleverna och därmed ge upphov till diskussioner och resonemang i grupperna.

Med utgångspunkt i dessa krav så utarbetades fyra stycken olika tärningsuppsättningar. Förutom att designen hade sin utgångspunkt i de allmänna krav som ställdes på situationen så designades dessa tärningar utifrån förslag på omdesign från den förberedande studien tillsammans med de fyra aspekter av variation som Marton et al. (2003) lyft fram i sin variationsteori. På det stora hela anser jag att undersökningssituationen uppfyllde de krav jag ställde. Eleverna lyfter sådana aspekter av sannolikhet som i den matematiska ansatsen varit i fokus. Situationen erbjöd eleverna ett konkret material som stimulerade dem att göra naturliga differentieringar. Dessa prioriteringar och begränsningar gav i sin tur mig möjlighet att i analysen arbeta med elevdiskussioner som koncentrerats till ett begränsat antal aspekter av sannolikhet i situationen. Men, med avseende på empiriska data i termer av elevdiskussioner har situationen också haft sina begränsningar. I anslutning till mina resultat argumenterade jag för den kulturella kontextens betydelse för elevers sätt att agera. Grupperna var inte vana vid att agera över den typ av öppen situation som spelet inneburit. Eleverna var inte vana vid att själva, två och två, sitta och diskutera fram och problematisera uppgifter. Detta ledde till att diskussionerna inte bara blev begränsade i omfång utan också begränsade med avseende på reflekterande processer och mer ingående systematiska ansatser. En annan aspekt är den begränsade tid som undersökningen genomfördes på. Detta tar sig uttryck på två sätt. För det första så upplever jag det som att grupperna blir lite stressade av att andra grupper börjar bli klara. När en grupp är klar ger man uttryck för detta och i vissa fall så går man även fram till spelbordet och väntar. För det andra var undersökningstillfället begränsat till en 60 minuters matematiklektion. Denna tidsram hade sin utgångspunkt i den undersökning som genomfördes i den preliminära studien. Vid det tillfället fann jag inte denna aspekt som hämmande. Men då ska vi komma ihåg att den preliminära studiens design var lika i alla fyra tärningsuppsättningar. I den aktuella situationen möttes eleverna av olika uppsättningar, varför varje diskussionstillfälle blev betydligt längre. Detta var i och för sig en konsekvens som jag hade hoppats på, men som med facit i hand kan sägas ha blivit hämmad av situationella determinanter med avseende på tid.

Vi ser i studien att det finns tillfällen då observatörerna påtalar vissa aspekter i situationen för eleverna. Dessa interventioner anser jag inte vara begränsande för studien då de kan tolkas som en naturlig resurs som erbjuds eleverna. Utifrån ett kontextualiseringsperspektiv ingår dessa interventioner bland övriga determinanter och intressant blir det sätt på vilket eleverna processar denna resurs, och hur en kontextualisering av den tar sig uttryck i elevernas agerande. Som ett led i detta så kan det finnas anledning att som observatör vara mer delaktig i elevernas modelleringsarbete, för att få en tydligare bild av det sätt på vilket eleverna uppfattar aspekter av sannolikhet. Till kommande studier skulle man som forskare kunna följa upp spelsituationen med ett antal elevintervjuer för att få djupare insikt i differentieringsprocessen. Något som ytterligare skulle bidra till att få eleverna att reflektera över de aspekter av sannolikhet som ingår i spelet vore att låta dem själva designa egna tärningar och regler för satsningar, efter att ha spelat spelet med givna tärningar.

Som poängterats i avsnitt 8.1 så aktualiserades inte den frekvensorienterade ansatsen i elevernas kontextualiseringar på något avgörande sätt. I ett försök att ställa denna information till förfogande för eleverna, samtidigt som man tillmötesgår övriga aspekter i designen, så anser jag att eleverna bör spela med samma uppsättning tärningar flera gånger. Men, då jag identifierat i den förra studien att detta i sig inte leder till något mer ingående förhållningssätt till situationen i allmänhet och vad som genererat frekvenserna i synnerhet så måste ytterligare incitament till för att stimulera detta, i syfte att bringa klarhet i det sätt på vilket eleverna kontextualiserar med avseende på frekvenser. I linje med vad som påtalats ovan så vore också här lämpligt att låta eleverna, efter den omgång man spelat, besvara ytterligare frågor i anslutning till frekvenser.

### 8.2.2 Diskussion av analysmetod

I arbetet med att förklara det sätt på vilket eleverna hanterar och uppfattar aspekter av sannolikhet introducerades en metod för att analysera dessa data. Metoden kallas för intentionell analys och har varit föremål för beskrivning i avsnitt 6.1.

I syfte att beskriva elevers sätt att differentiera och kontextualisera i en experimenterande miljö, så har den intentionella analysen visat sig vara ett lämpligt redskap. Då metoden beaktar begreppsliga, sociala och kulturella föreställningar som determinanter så får vi en analysmetod som möjliggör för oss att ställa elevers begreppsliga repertoar till sammanhang. Genom att tillskriva eleverna en intention, i anslutning till situationen, så kan vi finna en anledning till varför eleverna agerar som de gör, under de omständigheter som är implicerade i termer av inre och yttre determinanter. På detta sätt är det i denna studie möjligt att förstå elevernas resonemang i termer av equiprobability, nummermodellen och avgränsningar i ytterligheter.

Med hjälp av metoden ger vi stadga åt tolkningar genom att visa hur den struktur ser ut som respektive tolkning följt. Efter att utförligt ha beskrivit de tankebanor jag lutar mina tolkningar mot formaliseras denna struktur i en praktisk syllogism, för respektive handling. Syftet med att konstruera de praktiska syllogismerna är att precisera tolkningar, dvs. erbjuda läsaren ett förtydligande av vad tidigare resonemang sagt. Jag anser att jag i denna studie uppnått detta syfte men är samtidigt medveten om att en sådan konstruktion kan bli begränsande, då den styr läsaren mot ett alltför begränsat seende i analysarbetet.

Som antytts tidigare i både analysarbetet och i diskussionen så hade önskvärt varit att få ytterligare empirisk information till förfogande för mitt tolkningsarbete. Då metoden skall inkludera tre delkontexter och väva samman information från dessa krävs det av naturliga skäl en stor mängd empiriska data som belyser aspekter av de olika kontexterna och relationer dem emellan.

## 8.3 Implikationer för skolundervisningen

Vad kan ett kontextualiseringsperspektiv innebära för skolundervisningen i sannolikhet? På vilket sätt skulle man kunna använda det tärningsspel som legat till grund för elevundersökningen vid undervisning om sannolikhet?

Mina resultat tyder på att man som lärare inte får dra förhastade slutsatser om den respons elever ger. Som vi ser i fallet med möjlig och omöjlig händelse så skulle man exempelvis kunna argumentera för att svenska årskurs sju elever inte kan summera 1+1 eller 2+3, då de placerat marker felaktigt. I ett kontextualiseringsperspektiv blir detta inte en missuppfattning eller prov på bristande kunskap i addition utan istället en fråga om vilket problem eleverna ställt sig att lösa. Det sätt på vilket eleverna uppfattar och tolkar och ställer information till sitt förfogande i en uppgiftssituation blir i ett sådant perspektiv centrala utgångspunkter för att förstå elevers agerande. Det sätt på vilket kontextualiseringsperspektivet är relevant för en undervisningspraktik anser jag just vara det faktum att det aktualiserar aspekter i hela undervisningssituationen. Det ställer ett undervisningsobjekt i relation till en helhet i termer av personliga konstruktioner av en begreppslig, situationell och kulturell kontext.

I syfte att undersöka elevers kontextualiserings- och differentieringsprocess designades ett uppgiftssystem som baserades på ett tärningsspel utifrån summan av två tärningar. De aspekter av sannolikhet som i designen varit implicerade har diskuterats i avsnitt 5.3. Med utgångspunkt i dessa aspekter tillsammans med de resultat jag funnit i studien så finner jag flera anledningar till att utforma lärsituationer i matematik i allmänhet och sannolikhet i synnerhet i linje med den variationsmetod som legat till grund för elevundersökningen.

Med avseende på matematikämnet i allmänhet så går designen med fördel att koppla till ämnets utbildningsmål i läroplanen. I inledningen av studien såg vi att läroplanen poängterade som väsentligt att låta elever konfronteras med och använda sig av enkla matematiska modeller samt att kunna kritiskt granska modellers förutsättningar, begränsningar och användning för att utveckla en förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande (Skolverket, 1998). Detta anser jag att spelsituationen, med innehållande uppgiftssystem, uppfyller i flera avseenden. Genom att såväl arbeta fram som att utvärdera hypoteser beträffande uppläggsstrategier så stimuleras eleverna till att formulera, föra och använda logiska resonemang. Dessutom, i linje med Martons variationsteori, erbjuder designen eleverna att prioritera en aspekt i taget, dvs. eleverna stimuleras på ett naturligt sätt till att fokusera väsentliga parametrar och val av avgränsningar i situationen. Detta kan ses som en väsentlig aspekt i ett allmänt modelleringsförfarande. Dessutom kan detta sätt att prioritera en aspekt i taget ses som undervisningskulturellt anpassat, i den mening att många matematiska uppgifter är konstruerade med små variationer sinsemellan.

Med utgångspunkt i ett kontextualiseringsperspektiv så antyder också flera av mina resultat att elevers modelleringsarbete blir väsentligt för det sätt på vilket elever gör bedömningar i slumpförsök. Genom att konfrontera elever med spelet erbjuds läraren möjlighet att skapa sig en bild av den föreställningsvärld eleven håller kring olika aspekter av sannolikhet. Men som vi kan ana i mina resultat så blir inte bara vi som observatörer (eller lärare) uppmärksammade på detta. Då en tydlig tyngdpunktsförändring mellan delkontexterna visat sig under situationens lopp finns det anledning att tro att också eleverna gjorts uppmärksamma på sitt eget sätt att agera. I ett kontextualiseringsperspektiv anser jag detta vara av yttersta intresse i en undervisningssituation; att få såväl lärare som elever medvetna om olika föreställningar och på vilka grunder dessa förställningar vilar.

## 8.4 Framtida studieobjekt

Mina resultat indikerar att det finns anledning att studera vidare elevers sätt att uppfatta och hantera aspekter av sannolikhet i termer av processerna kontextualisering och differentiering, givet de interna och externa resurser som står till deras förfogande. Framförallt vore det intressant att studera vidare de fall då eleverna agerar i enlighet med nummermodellen. Vilka begreppsliga determinanter står egentligen bakom denna modell? Studien antyder att det är någon form av naiv kombinatorisk förmåga. I anslutning till detta vore det också intressant att undersöka det sätt på vilket elever skulle kontextualisera en diagrammatisk modell, som ett träddiagram eller den i avsnitt 5.3.1 presenterad, över ett slumpförsöks alla möjliga utfall. Dessutom så aktualiserade studien ett ytterlighetsorienterat förhållningssätt. Detta anser jag skulle vara av stort värde att ytterligare bringa klarhet i, då agerandet implicerar en allmän förmåga av ett modelleringsarbete.

# 9 Referenslista


Batanero, C., Green, D. & Serrano, L. (1996). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 29*, 113-124.

Bergqvist, K. (1990). *Doing Schoolwork. Task premisses and joint activity in the comprehensive classroom*. (Linköping Studies in Arts and Science, 55). Linköpings universitet.

Blom, G. (1970). *Sannolikhetsteori med tillämpningar*. Lund: Studentlitteratur.

Blom, G. (1984). *Sannolikhetsteori med tillämpningar*. Lund: Studentlitteratur.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In Kapadia, R. & Borovcnik, M. (Eds.). *Chance Encounters: Probability in Education*, 27-71. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Caravita, S. & Halldén, O. (1994). Re-Framing the Problem of Conceptual Change. *Learning and Instruction, 4,* 89-111.

Cosmides, L. & Tooby, J. (1996). Are human good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgement under uncertainty. *Cognition, 58,* 1-73.

diSessa, A. A. (1993). Towards an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10,* 105-226.

Driver, R. (1981). Pupils’ Alternative Frameworks in Science. *European Journal of Science Education 3 (1),* 93-101.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1987). Intuitions in Science and Mathematics: An Educational approach. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E., Nello, M.S. & Marino, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523-549.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 309-329. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. Gilovich, T., Griffin, D. & Kahneman, D. *Heuristics and Biases: The psychology of Intuitive Judgement*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gilovich, T. & Griffin, D. (2002). I Gilovich, T., Griffin, D. & Kahneman, D. (eds.), *Heuristics and Biases: The psychology of Intuitive Judgement*, 1-18. Cambridge: Cambridge University Press.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics, 45,* 15-33. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Halldén, O. (1999). Conceptual Change and Contextualisation. I W. Schnotz, M. Carretero och S. Vosniadou (red.), *New perspectives on conceptual change*. London: Elsevier.

Halldén, O., Scheja, M. & Jakobsson Örn, H. (2001). *Intentionell analys*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Hawkins, A. & Kapadia, R. (1984). Children's conception of probability – a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 349-377.

Howard, R. V. (1987). Concepts and Schemata. An introduction. London: Cassel.

Johansson, B. (1981). *Krafter vid rörelse. Teknologers uppfattningar av några grundläggandefenomen inom mekaniken.* Göteborgs universitet: Pedagogiska institutionen.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thornton, C.A. & Tarr, J.E. (1999). Understanding Students' Probabilistic Reasoning. In Stiff, L. and Curcio, F. (eds.). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* 146-155. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics

Jonsson, D. & Norell, L. (1999). *Ett stycke statistik.* Stockholm: Nordstedts tryckeri AB.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. *Cognitive Psychology, 3 (3)*, 430-445.

Keeler, C. & Steinhorst, K. (2001). A new approach to learning probability in the first statistic course. Journal of Statistics Education, V9N3. University of Idaho.

Keren, G. (1984). On the Importance of Identifying the Correct Sample Space. *Cognition, 16,* 121-128.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive Models and Problem spaces in "Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Marton, F., Amy B. M. Tsui with Pakey P.M. Chik ... [et al.]. (2003). Classroom discourse and the space of learning. Mahwah, N.J. : L. Erlbaum Associates.

Nilsson, P. (2002). En studie över påverkansfaktorer vid erfarande av ett matematisk begrepp i en experimenterande miljö, (*A case study concerning: Factors affecting the experience of mathematical concepts in an experimental environment*). Växjö university of Sweden: School of Mathematics and Systems Engineering.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pratt, D. (1998). *The construction of meanings in and for a stochastic domain of abstraction.* Unpublished doctoral dissertation, University of London.

Pratt, D. (2000). Making sense of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(5),* 602-625.

Ritson, R. (1998). *The Development of Primary School Children's Understanding of Probability*. Unpublished thesis, Queen's University, Belfast.

Scheja, M. (2002). Contextualising Studies in Higher Education – First-year experiences of studying and learning in engineering. Doktorsavhandling. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 465-494. New York: Macmillan.

Skolverket. (1998). Läroplan för det obligatoriska skolväsendet (Lpo 94).

Smith, J. P., diSessa, A. A. & Roschelle, J. (1993). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *The Journal of Learning Sciences, 3 (2)*, 115-163.

Sternberg, R. J. (1999). The Nature of Mathematical Reasoning. In Stiff, L. and Curcio, F. (eds.). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. 37-44. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

Säljö, R. (1991). Learning and Mediation –Fitting Reality Into a Table. *Learning and Instruction1*, 261-272.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken – Ett sociokulturellt perspektiv*. Prisma, Stockholm.Sweden.

Truran, J. (2001). The Teaching and Learning of Probability, with Special Reference to South Australian Schools from 1959-1994.
[Online], (http://thesis.library.adelaide.edu.au/public/adt-SUA20020902.154115/)

Wistedt, I., Brattström, G. & Jacobsson,C. (1993). Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I. & Brattström, G. (in press). Understanding Mathematical Induction in a Co-operative Setting: Merits and Limitations of Classroom Communication Among Peers. In A. Chronaki, & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging Ways of Viewing Classroom Communication*. Elsevier Science.

Wistedt, I., Brattström, G. & Martinsson, M. (1996). *Studier av kunskapsbildning i matematik i dialog mellan två vetenskaper*. Kolmården: Bidrag till ämnesdidaktisk konferens.

von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. London: Routledge and Kegan Paul.

von Wright, G. H. (1979). The determinants of action. I. H. Kohlenberger (red.), *Reason, action and experience. Essays in honor of Raymond Klibanshy*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 107-119.

Växjö
universitet

**Matematiska och systemtekniska institutionen**
SE-351 95 Växjö

tel 0470-70 80 00, fax 0470-840 04
www.msi.vxu.se