Problem givna under Sonja Kovalevsky dagarna i Linköping 2004.

Nedan följer (nästan) alla de problem jag gav vid min föreläsning "Vad är matematik?" under Sonja Kovalevsky dagarna år 2004.

För en korrekt lösning av problem k nedan, presenterad innan Sonja Kovalevsky dagarnas avslutning, utbetalades 10^{k-1} kronor.

Problem 1. *Finns det naturliga tal n så att de tre talen n, $n+2$ och $n+4$ alla är primtal?*

Finns det oändligt många sådana tal?

Lösning av Problem 1.

Påstående: Talen 3, 5 och 7 är den enda lösningen.

Betrakta talet n och låt $n = 3q + r$ där q är kvoten och r $(0 \leq r \leq 2)$ är resten vid division av n med talet 3.

Då är $n + 2 = 3q + (r + 2)$ och $n + 4 = 3(q + 1) + (r + 1)$.

Eftersom något av talen r, $r+1$ och $r+2$ är delbart med 3 (kontrollera!), följer att något av talen n, $n+2$ och $n+4$ är delbart med 3.

Eftersom det enda primtal vilket är delbart med 3 är just talet 3 själv så följer påståendet.

Problem 2. *Visa att för varje $n \in \mathbf{N}$ gäller att summan av de reciproka värdena av de n första primtalen*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

aldrig är ett heltal.

Problem 3. *Visa att för varje $n \in \mathbf{N}$ gäller att summan av de reciproka värdena av de $n-1$ första naturliga talen större än 1*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

aldrig är ett heltal.

Innan vi ger oss i kast med Problem 2 och 3 så påminner vi om att varje naturligt tal på ett, så när som på ordningen, unikt sätt kan skrivas som en produkt av primtal. Detta använder vi oss av i lösningarna nedan (och det är nyttigt att tänka igenom var det används). Dessutom använder vi följande hjälpsats eller lemma.

Lemma 1. *Låt a, b och c vara tre naturliga tal sådana att c inte delar b. Då gäller att*

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{c}$$

inte är ett heltal.

Bevis.

Om det fanns ett heltal n sådant att

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{c} = n\,,$$

så skulle det följa att

$$ac + b = nbc\,,$$

vilket skulle innebära att c delar b, men detta är enligt förutsättningarna omöjligt. Detta bevisar lemmat.

Lösning av Problem 2.

Påståendet är sant då $n = 1$ ($\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$), så vi antar nu att $n \geq 2$.

Betrakta summan av de reciproka värdena av de n första primtalen,

$$S_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{p_n}\,.$$

Låt nu

$$\frac{a}{b} := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}}\,,$$

där b är den minsta gemensamma nämnaren, vilket i detta fall alltså är produkten av de $n-1$ första primtalen $b = p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$. Påståendet följer nu omedelbart av Lemma 1 applicerat på

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{1}{p_n}\,,$$

eftersom p_n inte delar b.

Lösning av Problem 3.

Påståendet är sant då $n = 2$ ($\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$), så vi antar att $n \geq 3$.

Betrakta nu summan av de reciproka värdena av de $n-1$ första naturliga talen större än 1

$$S_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Välj nu heltalet s så att

$$2^s \leq n < 2^{s+1}\,.$$

Notera att inget av heltalen $k \in [2^s + 1, 2^{s+1})$ innehåller faktorn 2^s.

Vi har alltså att

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^s - 1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s + 1} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Sätt nu

$$\frac{a}{b} := \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^s - 1} + \frac{1}{2^s + 1} + \cdots + \frac{1}{n}\,,$$

där b är den minsta gemensamma nämnaren.

Det gäller då att b innehåller faktorn 2^{s-1}, medan 2^s inte delar b eftersom inget av heltalen mindre än eller lika med n och skilda från 2^s innehåller faktorn 2^s.

Påståendet följer nu av lemmat applicerat på

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{1}{2^s}\,.$$

Avslutande kommentar.

Problem 4 löstes tyvärr inte av någon under Sonja Kovalevsky dagarna, varför vi sparar detta problem för att kunna använda det även kommande år.

Magnus Fontes.